Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Test Montag-A **WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S. Ziegenhagen**
Lösungen

(P1) Beantworten Sie die folgenden Fragen. (Sie müssen nicht alle Fragen beantworten.) Pro richtiger Antwort gibt es einen Punkt, pro falscher wird ein Punkt abgezogen. [1]

		wahr	**falsch**
(a)	Die Zuordnung $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $\frac{p}{q} \mapsto p - q$ ist eine Funktion.	☐	☒
(b)	Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $x^2 > 9$ notwendig für $x > 3$.	☒	☐
(c)	Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $x > 3$ notwendig für $x^2 > 9$.	☐	☒
(d)	Keine Potenzmenge enthält die Zahl Null als Element.	☒	☐
(e)	$\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$ enthält genau 16 Elemente.	☒	☐
(f)	$\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\} \neq \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$.	☐	☒

(P2) Beweisen Sie für beliebige Mengen A, B, C die Gleichheit

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C) \ .$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \setminus C) \ &\Leftrightarrow \ \big(x \in A \wedge y \in B \setminus C\big) \ \Leftrightarrow \big(x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)\big) \\
&\Leftrightarrow \big(x \in A \wedge y \in B \wedge x \in A \wedge y \notin C\big) \\
&\Leftrightarrow \big((x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C)\big) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \notin (A \times C) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) \ .
\end{aligned}$$

(P3) Geben Sie mit Beweis eine symmetrische Relation auf $\mathbb{Z}$ an, so dass sie keiner Funktion entspricht und jedes $z \in \mathbb{Z}$ mit mindestens einer Zahl $z' \in \mathbb{Z}$ in Relation steht.

Lösungsvorschlag: Die Relation

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y \vee x = -y\}$$

[1] Sie können aber nicht weniger als 0 Punkte auf die Aufgabe bekommen!

ist offensichtlich reflexiv (also steht jede Zahl mit einer Zahl in Relation) und auch symmetrisch, da gilt

$$(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x = y \vee x = -y \;\Leftrightarrow\; y = x \vee y = -x \;\Leftrightarrow\; (y, x) \in R\ .$$

Die Relation ist keine Funktion, da $(2, 2) \in R$ und $(2, -2) \in R$, der Zahl 2 würden also zwei verschiedene Werte zugeordnet.

(P4) Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion.

(a) Definieren Sie für eine Menge $M \subseteq \mathbb{Z}$ das Bild von M unter f.

(b) Die Abbildungsvorschrift von f laute $x \mapsto 3x^2 - 2$. Berechnen Sie das Bild von $\{z \in \mathbb{Z} : -2 \leq z \leq 3\}$ (unter f) und das Urbild von $[71, 73] \cap \mathbb{Z}$.

Lösungsvorschlag:

(a) Das Bild von M unter f ist definiert als $f(M) := \{f(x) : x \in M\}$.

(b) Es sind

$$f(\{z \in \mathbb{Z} : -2 \leq z \leq 3\}) = \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)\} = \{-2, 1, 10, 25\}$$

und

$$f^{-1}([71, 73] \cap \mathbb{Z}) = f^{-1}(\{71, 72, 73\}) = \{-5, 5\}\ .$$

(P5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n := [0, n[$.

(a) Definieren Sie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$.

(b) Bestimmen Sie mit Beweis $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$.

(c) Bestimmen Sie mit Beweis $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$.

Lösungsvorschläge:

(a) Es ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \{x : (\exists\, n \in \mathbb{N} : x \in T_n)\}$.

(b) Es gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n = [0, 1[$:
Für $x \in [0, 1[$ gilt offensichtlich $0 \leq x < 1$, also $\forall\, n \in \mathbb{N} : 0 \leq x < n$. Daraus folgt $\forall\, n \in \mathbb{N} : x \in T_n$ und das bedeutet gerade $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$. Ist umgekehrt $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$, so gilt natürlich $x \in T_1 = [0, 1[$.

(c) Es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \mathbb{R}_0^+ := [0, \infty[$:
Für $x \in \mathbb{R}_0^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$, also $\exists\, n \in \mathbb{N} : 0 \leq x < n$. Daraus folgt $\exists\, n \in \mathbb{N} : x \in T_n$ und das bedeutet gerade $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$. Ist umgekehrt $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$, so gilt natürlich $\exists\, n \in \mathbb{N} : x \in T_n = [0, n[$, also $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq x$.