Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

# Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

## Test Dienstag-B Lösungen

## WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S. Ziegenhagen

(P1) Beantworten Sie die folgenden Fragen. (Sie müssen nicht alle Fragen beantworten.) Pro richtiger Antwort gibt es einen Punkt, pro falscher wird ein Punkt abgezogen. [1]

| | | wahr | falsch |
|---|---|---|---|
| (a) | Es gibt keine Menge, die zwei Potenzmengen als Elemente enthält. | ☐ | ☒ |
| (b) | $(p \Rightarrow q)$ ist genau dann wahr, wenn $p$ notwendig für $q$ ist. | ☐ | ☒ |
| (c) | $[7,8] \subset H$ ist notwendig für $]7,8] \subset H$. | ☐ | ☒ |
| (d) | $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\} \times \{a, b\}$ enthält genau 5 Elemente. | ☐ | ☒ |
| (e) | $\{\{\text{Tornadorot}\}\} \in \mathcal{P}\big(\{\text{Tornadorot, Surfblau, Englischrot}\}\big)$. | ☐ | ☒ |
| (f) | $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \quad x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$ entspricht einer symmetrischen Relation. | ☒ | ☐ |

(P2) Beweisen Sie für beliebige Mengen $A, B$ die Implikation

$$\big(\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)\big) \Rightarrow \big(A \subseteq B\big)\ .$$

**Beweis:** Unter der Voraussetzung $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ gilt

$$\begin{aligned} x \in A \ &\Rightarrow\ \{x\} \subseteq A \ \Rightarrow\ \{x\} \in \mathcal{P}(A) \ \Rightarrow\ \{x\} \in \mathcal{P}(B) \\ &\Rightarrow\ x \in B\ . \end{aligned}$$

(P3) Geben Sie mit Beweis eine Funktion auf $\mathbb{Q}$ an, die, als Relation betrachtet, symmetrisch ist.

**Lösungsvorschlag:** Die Identitätsabbildung erfüllt alle geforderten Eigenschaften, sei also

$$A : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto x\ .$$

Als Relation betrachtet entspräche die Abbildung also der Menge

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x = y\}\ .$$

[1] Sie können aber nicht weniger als 0 Punkte auf die Aufgabe bekommen!

Nun existiert zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ mit $y := x$ genau ein $y \in \mathbb{Q}$, so dass $(x, y) \in A$, d.h. $A$ ist eine Funktion. Die Symmetrie sieht ist auch direkt zu folgern:

$$(x, y) \in A \;\Rightarrow\; x = y \;\Rightarrow\; y = x \;\Rightarrow\; (y, x) \in A \,.$$

(P4) (a) Definieren Sie den Begriff Funktion.

(b) Beweisen Sie, dass $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y - 4\}$ eine Funktion ist und geben Sie die folgenden zugehörigen Mengen an:
Definitionsbereich, Bildbereich und Wertebereich von $R$.

**Lösungsvorschlag:**

(a) Eine Relation $R \subseteq A \times B$ wird Funktion genannt, wenn gilt

$$\forall\, a \in A : \; \exists!\, b \in B : (a, b) \in R \,.$$

(b) Nach Definition ist $R$ eine Relation. Ist nun ein $x \in \mathbb{Z}$ gegeben, so existiert wegen

$$x = y - 4 \;\Leftrightarrow\; y = x + 4$$

mit $y := x + 4$ genau ein $y \in \mathbb{Z}$, so dass $(x, y) \in R$.
Der Definitionsbereich ist $\mathbb{Z}$, der Bildbereich auch, der Wertebereich von $R$ ist

$$\{y \in \mathbb{Z} : (\exists\, x \in \mathbb{Z} : y = x + 4)\} = \mathbb{Z} \,,$$

wie man erneut an der Äquivalenz $x = y - 4 \;\Leftrightarrow\; y = x + 4$ erkennen kann.

(P5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n := [-n - 1, n + 1]$ .

(a) Definieren Sie $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

(b) Bestimmen Sie mit Beweis $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

(c) Bestimmen Sie mit Beweis $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

**Lösungsvorschläge:**

(a) Es ist $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{x : (\forall\, n \in \mathbb{N} : x \in S_n)\}$.

(b) Es gilt $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n = [-2, 2]$ :
Für $x \in [-2, 2]$ gilt offensichtlich $-2 \leq x \leq 2$, also $\forall\, n \in \mathbb{N} : -n - 1 \leq x \leq n + 1$. Daraus folgt $\forall\, n \in \mathbb{N} : x \in S_n$ und das bedeutet gerade $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Ist umgekehrt $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n$, so gilt natürlich $x \in S_1 = [-2, 2]$ .

(c) Es gilt $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n = \mathbb{R}$:
Für $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x| \leq n+1$, also $\exists\, n \in \mathbb{N} : -n-1 \leq x \leq n+1$. Daraus folgt $\exists\, n \in \mathbb{N} : x \in S_n$ und das bedeutet gerade $x \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Die andere Teilmengenbeziehung ist trivial.