



Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Test Dienstag-A
Lösungen

WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S.
Ziegenhagen

(P1) Beantworten Sie die folgenden Fragen. (Sie müssen nicht alle Fragen beantworten.)
Pro richtiger Antwort gibt es einen Punkt, pro falscher wird ein Punkt abgezogen.¹

	wahr	falsch
(a) $]7, 8] \subset H$ ist notwendig für $[7, 8] \subseteq H$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ entspricht einer antisymmetrischen Relation.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
(c) $(p \Rightarrow q)$ ist genau dann wahr, wenn p hinreichend für q ist.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(d) Es gibt eine Menge, die zwei Potenzmengen als Elemente enthält.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(e) $\{\text{Tornadorot}\} \in \mathcal{P}(\{\text{Tornadorot}, \text{Surfblau}, \text{Englischrot}\})$.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(f) $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\} \times \{a, b\}$ enthält genau 6 Elemente.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(P2) Beweisen Sie für beliebige Mengen A, B die Implikation

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)) .$$

Beweis: Unter der Voraussetzung $A \subseteq B$ gilt

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) &\Rightarrow X \subseteq A \subseteq B \Rightarrow X \subseteq B \\ &\Rightarrow X \in \mathcal{P}(B) . \end{aligned}$$

(P3) Geben Sie mit Beweis eine Funktion $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ an, die, als Relation betrachtet, reflexiv ist.

Lösungsvorschlag: Die Identitätsabbildung erfüllt alle geforderten Eigenschaften, sei also

$$A : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \mapsto x .$$

Als Relation betrachtet entspräche die Abbildung also der Menge

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x = y\} .$$

¹Sie können aber nicht weniger als 0 Punkte auf die Aufgabe bekommen!

Nun existiert zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ mit $y := x$ genau ein $y \in \mathbb{Q}$, so dass $(x, y) \in A$, d.h. A ist eine reflexive Relation und eine Funktion.

- (P4) (a) Definieren Sie den Begriff Funktion.
 (b) Beweisen Sie, dass $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y + 3\}$ eine Funktion ist und geben Sie die folgenden zugehörigen Mengen an:
 Definitionsbereich, Bildbereich und Wertebereich von R .

Lösungsvorschlag:

- (a) Eine Relation $R \subseteq A \times B$ wird Funktion genannt, wenn gilt

$$\forall a \in A : \exists! b \in B : (a, b) \in R .$$

- (b) Nach Definition ist R eine Relation. Ist nun ein $x \in \mathbb{Z}$ gegeben, so existiert wegen

$$x = y + 3 \Leftrightarrow y = x - 3$$

mit $y := x - 3$ genau ein $y \in \mathbb{Z}$, so dass $(x, y) \in R$.

Der Definitionsbereich ist \mathbb{Z} , der Bildbereich auch, der Wertebereich von R ist

$$\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z} : y = x - 3)\} = \mathbb{Z} ,$$

wie man erneut an der Äquivalenz $x = y + 3 \Leftrightarrow y = x - 3$ erkennen kann.

- (P5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n := [-n - 1, n + 1[$.

- (a) Definieren Sie $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$.
 (b) Bestimmen Sie mit Beweis $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$.
 (c) Bestimmen Sie mit Beweis $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

Lösungsvorschläge:

- (a) Es ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{x : (\forall n \in \mathbb{N} : x \in S_n)\}$.

- (b) Es gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = [-2, 2[$:

Für $x \in [-2, 2[$ gilt offensichtlich $-2 \leq x < 2$, also $\forall n \in \mathbb{N} : -n - 1 \leq x < n + 1$. Daraus folgt $\forall n \in \mathbb{N} : x \in S_n$ und das bedeutet gerade $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Ist umgekehrt $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$, so gilt natürlich $x \in S_1 = [-2, 2[$.

- (c) Es gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \mathbb{R}$:

Für $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x| < n + 1$, also $\exists n \in \mathbb{N} : -n - 1 < x < n + 1$. Daraus folgt $\exists n \in \mathbb{N} : x \in S_n$ und das bedeutet gerade $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Die andere Teilmengenbeziehung ist trivial.