Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 9 — SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P18) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrl} & & & 3x_4 & -x_5 & = -1 \\ x_1 & & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +3x_5 & = 2 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = 1 \end{array}$$

Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) zu diesem Gleichungssystem. Benutzen Sie dann elementare Zeilenumformungen um diese Matrix in eine Matrix (A', b') zu überführen, bei der die Koeffizientenmatrix A' in Zeilenstufenform ist. Zum Schluss bestimmen Sie die Lösungsmenge.

(LP18) Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}\,. \end{array}$$

Weil das erste Element der ersten Spalte Null ist, tauschen wir die erste Zeile mit der zweiten Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I}'{=}\mathrm{II} \\ \mathrm{II}' = \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}\,. \end{array}$$

Nun eliminieren wir alle Einträge unterhalb des Eintrags, der in der linken oberen Ecke steht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \mathrm{II}' \\ \mathrm{III}' = \mathrm{III} - \mathrm{I}' \\ \mathrm{IV}' = \mathrm{IV} - \mathrm{I}'\,. \end{array}$$

Weil wir noch keine Zeilenstufenform erreicht haben, fangen wir nun mit den Schritten des Algorithmus von vorne an. Jetzt allerdings mit der Restmatrix, die dadurch gegeben ist, dass wir die erste Zeile der Matrix streichen/ignorieren. Wir tun also, als würde die Matrix mit der zweiten Zeile beginnen.

Die erste Spalte der Restmatrix, die nicht komplett Null ist, ist die zweite Spalte. Leider ist hier das oberste Element Null, und so müssen wir erneut die Zeilen vertauschen:

$$\begin{array}{l}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \mathrm{II}'' = \mathrm{III}' \\ \mathrm{III}'' = \mathrm{II}' \\ \mathrm{IV}'\,. \end{array}\end{array}$$

Wir führen erneut den zweiten Schritt des Algorithmus aus und eliminieren alle unerwünschten Elemente:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \mathrm{II}'' \\ \mathrm{III}'' \\ \mathrm{IV}'' = \mathrm{IV}' - 2\,\mathrm{II}''\,. \end{array}$$

Da wir immer noch keine Zeilenstufenform erreicht haben, fangen wir nun mit den Schritten des Algorithmus von vorne an. Jetzt mit der Restmatrix, die nur noch aus den letzten beiden Zeilen der ersten Matrix besteht (hinschreiben werden wir aber weiterhin die ganze Matrix). Im ersten Schritt ist nichts zu machen. Im zweiten Schritt müssen wir erneut eliminieren:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \mathrm{II}'' \\ \mathrm{III}'' \\ \mathrm{IV}''' = \mathrm{IV}'' + \mathrm{III}''\,. \end{array}$$

Nun ist endlich die gesamte Matrix in Zeilenstufenform und wir können mit dem Rückwärtseinsetzen beginnen. Aus der letzen Zeile folgt $x_5 = 1$. Einsetzen in die vorletzte Zeile liefert $3x_4 = -1 + x_5 = -1 + 1 = 0$. Wenn wir dies nun in die zweite Zeile einsetzen, erhalten wir

$$x_2 + x_3 = 1 - x_4 - x_5 = 1 - 0 - 1 = 0\,.$$

Es folgt also $x_2 = -x_3$. Wir wählen $x_3 = \alpha$, mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, und erhalten $x_2 = -\alpha$. Zum Schluss setzen wir alles in die erste Zeile ein und bekommen

$$x_1 = 1 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 - \alpha - 2 = -1 - \alpha\,.$$

Die Lösungsmenge des LGS ist somit

$$L = (-1, 0, 0, 0, 1) + \mathbb{R}(-1, -1, 1, 0, 0)\,.$$

(P19) Es sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & + & \dots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

gegeben ($m > 1$). Die Lösungsmenge dieses Systems bezeichnen wir mit L. Weiter sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
(a_{j1}+a_{i1})x_1 & + & (a_{j2}+a_{i2})x_2 & + & \dots & + & (a_{jn}+a_{in})x_n & = & b_j+b_i \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

gegeben, welches wir erhalten, indem wir bei dem ersten System zur j-ten Zeile die i-te Zeile addieren (wir haben also (EZ 2) benutzt). Die Lösungsmenge des zweiten Systems bezeichnen wir mit L'. Beweisen Sie, dass die elementare Zeilenumformung (EZ 2) nicht die Lösungsmenge eines Gleichungssystems verändert, also dass $L = L'$ gilt.

(LP19) Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in L$. Weil sich beide LGS nur in der j-ten Spalte unterscheiden, reicht es aus zu zeigen, dass x die j-te Zeile des zweiten LGS erfüllt. Wir rechnen nach

$$\begin{array}{ccccccccc}
(a_{j1}+a_{i1})x_1 & + & (a_{j2}+a_{i2})x_2 & + & \dots & + & (a_{jn}+a_{in})x_n & = & \\
a_{j1}x_1+a_{i1}x_1 & + & a_{j2}x_2+a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{jn}x_n+a_{in}x_n & = & \\
\multicolumn{3}{c}{(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n)} & + & \multicolumn{3}{c}{(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)} & = & b_j+b_i
\end{array}$$

Somit folgt $L \subseteq L'$.

Sei nun $x = (x_1, \dots, x_n) \in L'$. Mit dem selben Argument wie oben beschränken wir uns darauf zu überprüfen, ob x die j-te Zeile des ersten LGS erfüllt. Wir rechnen nach

$$\begin{array}{cccccccccc}
\multicolumn{3}{c}{(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n)} & + & \multicolumn{3}{c}{0} & & = & \\
\multicolumn{3}{c}{(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n)} & + & \multicolumn{3}{c}{b_i - b_i} & & = & \\
\multicolumn{3}{c}{(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n)} & + & \multicolumn{3}{c}{(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)} & -b_i & = & \\
a_{j1}x_1+a_{i1}x_1 & + & a_{j2}x_2+a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{jn}x_n+a_{in}x_n & -b_i & = & \\
(a_{j1}+a_{i1})x_1 & + & (a_{j2}+a_{i2})x_2 & + & \dots & + & (a_{jn}+a_{in})x_n & -b_i & = & \\
 & & & & & & b_j+b_i & -b_i & = & b_j
\end{array}$$

(hierbei haben wir ausgenutzt, dass wir schon wissen, dass x die i-te Gleichung erfüllt). Es folgt $L' \subseteq L$. Wir erhalten also insgesamt $L' = L$.

Hausaufgaben

(H29) Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus.

(a)

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = 4 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & = -1 \end{array}$$

(2 Punkte)

(La) Die Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}\,. \end{array}$$

Wir bringen sie in Zeilenstufenform. Um Brüche so lang wie möglich zu vermeiden, vertauschen wir I und II:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I'} = \text{II} \\ \text{II'} = \text{I} \\ \text{III}\,. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I'} \\ \text{II''} = \text{II' - 2I'} \\ \text{III'} = \text{III - 3I'}\,. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I'} \\ \text{II''} \\ \text{III''} = \text{III' - }\frac{4}{3}\text{II''}\,. \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir $x_3 = \frac{11}{2}$ aus III", aus II" erhalten wir $3x_2 - \frac{11}{2} = -7$, also $x_2 = -\frac{1}{2}$, und aus I' erhalten wir $x_1 + \frac{1}{2} + \frac{11}{2} = 4$, also $x_1 = -2$.

(b)

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = 4 \\ 3x_1 & & +2x_3 & = 4 \end{array}$$

(2 Punkte)

(Lb) Die Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}\,. \end{array}$$

Um Brüche zu vermeiden vertauschen wir I und II

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I'} = \text{II} \\ \text{II'} = \text{I} \\ \text{III}\,, \end{array}$$

und bringen die Matrix wieder auf Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I'} \\ \text{II''} = \text{II' - 2I'} \\ \text{III'} = \text{III - 3I'}\,. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I'} \\ \text{II''} \\ \text{III''} = \text{III' - II''}\,. \end{array}$$

Aus III" folgt nun $0x_3 = -1$, also hat das System keine Lösungen.

(c)

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = 4 \\ 3x_1 & & +2x_3 & = 5 \end{array}$$

(2 Punkte)

(Lc) Die Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}\,. \end{array}$$

Wir wiederholen die Schritte die wir bei (b) gemacht hatten;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I'} = \text{II} \\ \text{II'} = \text{I} \\ \text{III}\,. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I'} \\ \text{II''} = \text{II' - 2I'} \\ \text{III'} = \text{III - 3I'}\,. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I'} \\ \text{II''} \\ \text{III''} = \text{III' - II''}\,. \end{array}$$

Aus III" folgt gar nichts. Aus II" folgt $3x_2 - x_3 = -7$. Wählen wir $\lambda = x_3$ als Parameter, so erhalten wir $x_2 = \frac{1}{3}\lambda - \frac{7}{3}$. Aus I' folgt $x_1 = 4 + x_2 - x_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\lambda$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ erhalten wir genau eine Lösung $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 0) + \lambda(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1)$, d.h. die Lösungsmenge ist

$$L = (\tfrac{5}{3}, -\tfrac{7}{3}, 0) + \mathbb{R}(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 1)\,.$$

(d)

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = \ 4 \\ 4x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = \ 8 \\ -x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & =-2 \end{array}$$

(2 Punkte)

(Ld) Die Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}\,. \end{array}$$

Umformen liefert schon im ersten Schritt die Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II' = II - 2 I} \\ \text{III'} = \text{III} + \frac{1}{2}\text{I}\,. \end{array}$$

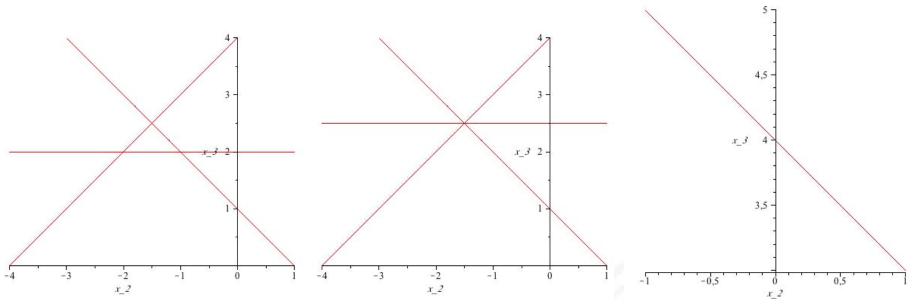
Die Variablen x_2 und x_3 können wir als unabhängige Parameter wählen, $\lambda = x_3$, $\mu = x_2$. I liefert dann $x_1 = 2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu$. Für jedes paar $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ haben wir daher genau eine Lösung $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0) + \lambda(-\frac{1}{2}, 0, 1) + \mu(-\frac{1}{2}, 1, 0)$. Es gilt

$$L = (2, 0, 0) + \mathbb{R}(-\tfrac{1}{2}, 0, 1) + \mathbb{R}(-\tfrac{1}{2}, 1, 0)\,.$$

(e) Skizzieren Sie für die Teile $(b) - (d)$ jeweils den Schnitt der Ebenen aus der Zeilensicht mit der $x_2 - x_3-$Ebene.

(2 Bonuspunkte)

(Le) Die Skizzen für b, c und d sind beziehungsweise



(8 Punkte)

(H30) Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = \quad 12t \\ 2x_1 & +12x_2 & +7x_3 & = 12t+7 \\ x_1 & +10x_2 & +6x_3 & = \ \ 7t+8 \end{array}$$

lösbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge an.

(4 Punkte)

(LH30) Die Koeffizientenmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}\,. \end{array}$$

Wir bringen sie in Zeilenstufenform;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & t+8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II' = II - I} \\ \text{III' = III - } \frac{1}{2}\text{ I}\,. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II'} \\ \text{III'' = III' - II'}\,. \end{array}$$

Die Gleichung III", $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = t + 1$, ist lösbar genau dann wenn $t = -1$. Wenn wir $\lambda = x_3$ als freien Parameter wählen, erhalten wir $x_2 = \frac{7}{8} - \frac{5}{8}\lambda$ aus II', und $x_1 = -\frac{31}{4} + \frac{1}{4}\lambda$ aus I.

Das System ist daher lösbar genau dann wenn $t = -1$. In diesem Fall erhalten wir für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{31}{4}, \frac{7}{8}, 0) + \lambda(\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}, 1)$.

(H31) Es sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben. Die Zeilen von A fassen wir als Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ auf. Wenn wir nun mittels einer elementaren Zeilenumformung die Matrix A in eine Matrix A' überführen, so sind die Vektoren, die wir als Zeilen der Matrix A' erhalten

(ez 1) $v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \ldots, v_m$, wenn wir mittels (EZ 1) die i-te Zeile von A mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$ multipliziert haben,

(ez 2) $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + v_i, \ldots, v_m$, wenn wir mittels (EZ 2) zu der j-ten Zeile die i-te Zeile addiert haben,

(ez 3) die gleichen Vektoren wir vorher, wenn wir mittels (EZ 3) zwei Zeilen vertauscht haben,

(ez 4) $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + \lambda v_i, \ldots, v_m$, wenn wir mittels (EZ 4) das λ-Fache der i-ten Zeile von A zu der j-ten Zeile addiert haben.

(a) Die Matrix $\overline{A}$ sei aus der Matrix A durch elementare Zeilenumformungen entstanden. Weiter seien die Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ die Zeilen der Matrix $\overline{A}$. Zeigen sie dass für die linearen Hüllen gilt

$$L(v_1, \ldots, v_m) = L(w_1, \ldots, w_m)\,.$$

(2 Punkte)

(b) Die Matrix $\overline{A}$ sei aus der Matrix A durch elementare Zeilenumformungen entstanden. Weiter seien die Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ die Zeilen der Matrix $\overline{A}$. Zeigen Sie, dass $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig ist, genau dann wenn $(w_1, \ldots, w_m)$ linear unabhängig ist.

(2 Punkte)

(La,b) Da (ez 4) eine Kombination ist von (ez 1) und (ez 2), reicht es a) und b) für (ez1), (ez 2) und (ez 3) zu zeigen. Die Umformung (ez 3) ist trivial.

Wir zeigen für (ez 1) und (ez 2), dass jede nicht-triviale Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ eine nicht-triviale Linearkombination der Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ ist, und umgekehrt.

(ez 1) Sei v eine nicht-triviale Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$,

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots + \alpha_m v_m \,. \tag{1}$$

Dann gilt

$$v = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_i w_i + \ldots + \beta_m w_m, \tag{2}$$

mit $\beta_j = \alpha_j$ für $j \neq i$ und $\beta_i = \alpha_i/\lambda$, wobei wir $\beta_i w_i = (\alpha_i/\lambda)(\lambda v_i)$ verwendet haben. Somit ist jede (nicht-triviale) Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$ auch eine (nicht-triviale) Linearkombination von $w_1, \ldots, w_m$.
Umgekehrt ist jede (nicht-triviale) Linearkombination von $w_1, \ldots, w_m$ auch eine (nicht-triviale) Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$: wenn es $\beta_1, \ldots \beta_m$ in $\mathbb{R}$ gibt sodass (2) gilt, dann gilt auch (1) mit $\alpha_j := \beta_j$ für $j \neq i$, und $\alpha_i := \beta_i \lambda$.

(ez 2) Sei v eine nicht-triviale Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$,

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots + \alpha_j v_j + \ldots + \alpha_m v_m \,. \tag{3}$$

Bei (ez 2) gilt $w_k = v_k$ für $k \neq j$, und $w_j = v_i + v_j$. Hieraus folgt, dass $v_j = w_j - v_i = w_j - w_i$ gilt. Wenn wir das einsetzen in (3) erhalten wir

$$v = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_i w_i + \ldots + \alpha_j (w_j - w_i) + \ldots + \alpha_m w_m, \tag{4}$$

also

$$v = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_i w_i + \ldots + \beta_j w_j + \ldots + \beta_m w_m, \tag{5}$$

mit $\beta_k = \alpha_k$ für $k \neq i$, und $\beta_i = \alpha_i - \alpha_j$. Somit ist jede (nicht-triviale) Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$ auch eine (nicht-triviale) Linearkombination von $w_1, \ldots, w_m$ (wären alle $\beta_l = 0$ für $l \in \{1, \ldots, m\}$, so wären auch alle $\alpha_k = 0$ für $k \neq i$ und sogar $\alpha_i = \alpha_i - \alpha_j = \beta_i = 0$).
Umgekehrt ist jede (nicht-triviale) Linearkombination von $w_1, \ldots, w_m$ auch eine (nicht-triviale) Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$: wenn es reelle Zahlen $\beta_1, \ldots \beta_m$ gibt, sodass (5) gilt, dann gilt auch (3) mit $\alpha_k := \beta_k$ für $k \neq i$, und $\alpha_i := \beta_i + \beta_j$.

Dies zeigt, dass die Mengen $L(v_1, \ldots, v_m)$ und $L(w_1, \ldots, w_m)$ der linear Kombinationen von $v_1, \ldots, v_m$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$ gleich sind. Auch können wir jetzt schlussfolgern, dass $\mathbf{0}$ eine nicht-triviale Linearkombination ist von $v_1, \ldots, v_m$ genau dann wenn es eine nicht-triviale Linearkombination von $w_1, \ldots, w_m$ ist. Somit ist $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig genau dann, wenn $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig ist.

(c) Es sei nun die Matrix A mittels elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix

$$S = \begin{pmatrix} * & & & & & & & & \\ & & * & & & & & & \\ & & & & & * & & & \\ & & 0 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & * & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform gebracht. Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig sind, wenn S eine Zeile hat, die nur aus Nullen besteht.

(2 Punkte)

(Lc) Da die Matrix S aus A entstanden ist durch elementare Zeilenumformungen, sind die Zeilen von A linear unabhängig genau dann, wenn die Zeilen von S linear unabhängig sind (folgt mit (b)). Wenn S eine Zeile hat, die nur aus Nullen besteht, sind die Zeilen von S sicher abhängig (vgl. P13c), und die Zeilen von A daher auch.

Umgekehrt ist es auch nicht schwer zu zeigen, dass die Zeilen von A linear unabhängig sind genau dann, wenn S keine Zeile hat die nur aus Nullen besteht. Das war hier aber nicht die Frage.

(d) Es sei erneut die Matrix A mittels elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix

$$S = \begin{pmatrix} * & - & & & & & & & \\ & & * & - & - & & & & \\ & & & & & * & & & \\ & & 0 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & * & - \\ & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform gebracht. Zeigen Sie, dass für die lineare Hülle gilt

$$L(v_1, \ldots, v_m) \neq \mathbb{R}^n ,$$

wenn S „lange Stufen" hat, also Stufen, die aus mehr als einem Eintrag besteht (bei der oben skizzierten Matrix ist das zum Beispiel bei der erste, zweite und vorletzte Zeile der Fall).

Tipp: Zeigen Sie beispielsweise, dass der Vektor, der an der i-ten Stelle eine 1 hat und sonst nur Nullen, nicht in der linearen Hülle von $v_1, \ldots, v_m$ sein kann, wenn die Matrix S in der i-ten Spalte keine Ecke hat. Bzgl. obiger Skizze wären dass zum Beispiel Vektoren der Art

$$(0,1,0,\ldots,0), (0,0,0,1,0,\ldots,0), (0,0,0,0,1,0,\ldots,0) \text{ oder } (0,\ldots,0,1)\,.$$

(2 Punkte)

(Ld) Wir zeigen, dass es nicht möglich ist v als eine Linearkombination $v = \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_m w_m$ der Zeilen von S zu schreiben, wenn v ein Vektor ist, der an der i-ten Stelle immer ein Null hat, wenn S in der i-ten Spalte eine Ecke hat (die Vektoren aus dem Tipp fallen z.B. hierunter).

Da die Lineare Hülle von den Zeilen von A genau die Lineare Hülle von den Zeilen von S ist (Aussage (a)), zeigt dies, dass die Hülle von den Zeilen von S, und somit die von A, wirklich kleiner ist als $\mathbb{R}^n$.

Die Matrix S hat die erste Ecke in Zeile 1, Spalte s_1, die zweite Ecke in Zeile 2, Spalte s_2, und so weiter. Die Matrix in der Skizze hat $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 6$, usw.

Wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ reelle Zahlen sind, sodass $v = \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_m w_m$ gilt, dann gilt $\alpha_1 = 0$; da S in Zeilenstufenform ist, haben w_2 bis w_n alle eine Null auf der s_1-ten Stelle, und w_1 nicht. Wegen der Annahme hat auch v eine Null auf der s_1-ten Stelle. Aus der s_1-ten Stelle von $v = \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_m w_m$ folgt dann $\alpha_1 = 0$.

Also $v = \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_m w_m$. Da S in der 2-ten Zeile, s_2-ten Spalte eine Ecke hat, ist die s_2-ten Stelle von w_2 nicht Null. Da die s_2-ten Stelle von allen w_i mit $i > 2$ Null ist (S ist auf Zeilenstufenform) und die s_2-ten Stelle von v Null ist, gilt auch $\alpha_2 = 0$.

Auf diese Weise sehen wir, dass alle α_i gleich Null sind, und daher, dass $v = \mathbf{0}$ gilt. Ein Vektor mit Nullen auf den Stellen s_1, s_2, usw., der nicht $\mathbf{0}$ ist, kann daher nicht eine Linearkombination von den Zeilen von S sein.

Da es solche Vektoren gibt, z.B. die in dem Tipp, kann die Lineare Hülle von den Spalten nicht $\mathbb{R}^n$ sein.

(e) Benutzen Sie die Resultate aus Aufgabe (c) und (d) um zu zeigen, dass eine Basis des $\mathbb{R}^n$ immer aus genau n Vektoren besteht.

(2 Bonuspunkte)

(Le) Sei $(v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Wir fassen die Basisvektoren auf als Zeilen von einer Matrix A, und bringen die Matrix auf Zeilenstufenform.

Wenn m größer als n wäre, erhälten wir mindestens eine Zeile die komplett Null ist. Wegen c) wäre die Basis dann linear Abhängig, ein Widerspruch.

Wenn m kleiner als n wäre, erhälten wir eine Matrix mit 'langen Stufen'. Wegen d) wäre die Lineare Hülle von der Basis $(v_1, \ldots, v_m)$ dann nicht $\mathbb{R}^n$, und wir hätten erneut ein Widerspruch.

Jede Basis von $\mathbb{R}^n$ muss daher genau aus n Elementen bestehen.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 20. Juni 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.