Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 9 — SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P18) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcr} & & & 3x_4 & -x_5 & = & -1 \\ x_1 & & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +3x_5 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & 1 \end{array}$$

Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) zu diesem Gleichungssystem. Benutzen Sie dann elementare Zeilenumformungen, um diese Matrix in eine Matrix (A', b') zu überführen, bei der die Koeffizientenmatrix A' in Zeilenstufenform ist. Zum Schluss bestimmen Sie die Lösungsmenge.

(P19) Es sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & + & \dots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

gegeben $(m > 1)$. Die Lösungsmenge dieses Systems bezeichnen wir mit L. Weiter sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ (a_{j1}+a_{i1})x_1 & + & (a_{j2}+a_{i2})x_2 & + & \dots & + & (a_{jn}+a_{in})x_n & = & b_j + b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

gegeben, welches wir erhalten, indem wir bei dem ersten System zur j-ten Zeile die i-te Zeile addieren (wir haben also (EZ 2) benutzt). Die Lösungsmenge des zweiten Systems bezeichnen wir mit L'. Beweisen Sie, dass die elementare Zeilenumformung (EZ 2) nicht die Lösungsmenge eines Gleichungssystems verändert, also dass $L = L'$ gilt.

Hausaufgaben

(H29) Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus.

(a)

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = 4 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & = -1 \end{array}$$

(2 Punkte)

(b)

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = 4 \\ 3x_1 & & +2x_3 & = 4 \end{array}$$

(2 Punkte)

(c)

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = 4 \\ 3x_1 & & +2x_3 & = 5 \end{array}$$

(2 Punkte)

(d)

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ 4x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 8 \\ -x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & = -2 \end{array}$$

(2 Punkte)

(e) Skizzieren Sie für die Teile (b)-(d) jeweils den Schnitt der Ebenen aus der Zeilensicht mit der $x_2 - x_3-$Ebene.

(2 Bonuspunkte)

(8 Punkte)

(H30) Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = 12t \\ 2x_1 & +12x_2 & +7x_3 & = 12t+7 \\ x_1 & +10x_2 & +6x_3 & = 7t+8 \end{array}$$

lösbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge an.

(4 Punkte)

(H31) Es sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben. Die Zeilen von A fassen wir als Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ auf. Wenn wir nun mittels einer elementaren Zeilenumformung die Matrix A in eine Matrix A' überführen, so sind die Vektoren, die wir als Zeilen der Matrix A' erhalten (ez 1) $v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_m$, wenn wir mittels (EZ 1) die i-te Zeile von A mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$ multipliziert haben,

(ez 2) $v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + v_i, \dots, v_m$, wenn wir mittels (EZ 2) zu der j-ten Zeile die i-te Zeile addiert haben,

(ez 3) die gleichen Vektoren wir vorher, wenn wir mittels (EZ 3) zwei Zeilen vertauscht haben,

(ez 4) $v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda v_i, \dots, v_m$, wenn wir mittels (EZ 4) das λ-Fache der i-ten Zeile von A zu der j-ten Zeile addiert haben.

(a) Die Matrix $\overline{A}$ sei aus der Matrix A durch elementare Zeilenumformungen entstanden. Weiter seien die Vektoren $w_1, \dots, w_m$ die Zeilen der Matrix $\overline{A}$. Zeigen sie dass für die linearen Hüllen gilt

$$L(v_1, \dots, v_m) = L(w_1, \dots, w_m)\,.$$

(2 Punkte)

(b) Die Matrix $\overline{A}$ sei aus der Matrix A durch elementare Zeilenumformungen entstanden. Weiter seien die Vektoren $w_1, \dots, w_m$ die Zeilen der Matrix $\overline{A}$. Zeigen Sie, dass $(v_1, \dots, v_m)$ linear unabhängig ist, genau dann wenn $(w_1, \dots, w_m)$ linear unabhängig ist.

(2 Punkte)

(c) Es sei nun die Matrix A mittels elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix

$$S = \begin{pmatrix} * & & & & & & & & \\ & & * & & & & & & \\ & & & & & * & & & \\ & & 0 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & * & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform gebracht. Zeigen Sie, dass $v_1, \dots, v_m$ linear abhängig sind, wenn S eine Zeile hat, die nur aus Nullen besteht.

(2 Punkte)

(d) Es sei erneut die Matrix A mittels elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix

$$S = \begin{pmatrix} * & - & & & & & & \\ & & * & - & - & & & \\ & & & & & * & & \\ & & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & & * \quad - \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform gebracht. Zeigen Sie, dass für die lineare Hülle gilt

$$L(v_1, \dots, v_m) \neq \mathbb{R}^n\,,$$

wenn S „lange Stufen" hat, also Stufen, die aus mehr als einem Eintrag besteht (bei der oben skizzierten Matrix ist das zum Beispiel bei der ersten, zweiten und vorletzten Zeile der Fall).

Tipp: Zeigen Sie beispielsweise, dass der Vektor, der an der i-ten Stelle eine 1 hat und sonst nur Nullen, nicht in der linearen Hülle von $v_1, \ldots, v_m$ sein kann, wenn die Matrix S in der i-ten Spalte keine Ecke hat. Bzgl. obiger Skizze wären dass zum Beispiel Vektoren der Art

$$(0,1,0,\ldots,0), (0,0,0,1,0,\ldots,0), (0,0,0,0,1,0,\ldots,0) \text{ oder } (0,\ldots,0,1)\,.$$

(2 Punkte)

(e) Benutzen Sie die Resultate aus Aufgabe (c) und (d) um zu zeigen, dass eine Basis des $\mathbb{R}^n$ immer aus genau n Vektoren besteht.

(2 Bonuspunkte)

(8 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 20. Juni 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.