Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

# Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

## Blatt 8 — SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

### Präsenzaufgaben

(P16) Es seien die Vektoren $v_1 = (-2, -3, 2), v_2 = (2, 4, 0), v_3 = (6, -1, 1)$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben. Fertigen Sie eine Skizze an, in die Sie die Vektoren einzeichnen und zeigen Sie, dass $(v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(LP16) Das Tupel $(v_1, v_2, v_3)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn jeder Vektor $v = (a, b, c)$ eindeutig geschrieben werden kann als $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Wir schreiben dies als ein System von 3 Gleichungen:

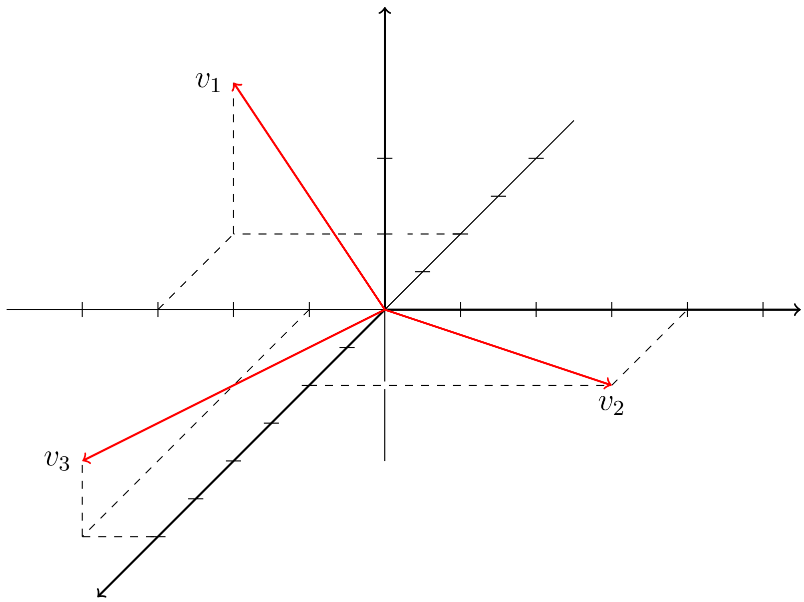
$$\begin{aligned} -2\alpha + 2\beta + 6\gamma &= a && (1)\\ -3\alpha + 4\beta - \gamma &= b && (2)\\ 2\alpha \qquad + \gamma &= c\,. && (3) \end{aligned}$$

Das Tupel $(v_1, v_2, v_3)$ ist linear unabhängig genau dann, wenn obenstehendes System für jedes $(a, b, c)$ *höchstens* eine Lösung hat. Das Tupel $(v_1, v_2, v_3)$ spannt $\mathbb{R}^3$ auf (das heißt, die Lineare Hülle $L(v_1, v_2, v_3)$ ist $\mathbb{R}^3$) genau dann, wenn obenstehendes System für jedes $(a, b, c)$ *mindestens* eine Lösung hat.

Das Tupel $(v_1, v_2, v_3)$ ist also eine Basis, wenn es linear unabhängig ist und $\mathbb{R}^3$ aufspannt, also wenn das System (1) (2) (3) für jedes $(a, b, c)$ *genau* eine Lösung $(\alpha, \beta, \gamma)$ hat.

Aus (3) erhalten wir $\gamma = c - 2\alpha$. Einsetzen in (2) liefert $\beta = (\alpha + b + c)/4$. Diese Ausdrücke für $\alpha$ und $\beta$ einsetzen in (1) liefert $\alpha = (-2a + b + 13c)/27$. Für jedes $(a, b, c)$ ist daher $\alpha, \beta, \gamma$ eindeutig bestimmt; $\alpha = (-2a+b+13c)/27$, $\beta = (\alpha+b+c)/4$, und $\gamma = c - 2\alpha$. Es folgt, dass $(v_1, v_2, v_3)$ eine Basis ist.

Alternativ kann man auch wie folgt vorgehen: Um zu zeigen, dass $(v_1, v_2, v_3)$ linear unabhängig ist, muss man nur beweisen, dass $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \mathbf{0}$ nur mit $\alpha = \beta = \gamma = 0$ erfüllt werden kann. Man muss also einfach das System (1) (2) (3) für $a = b = c = 0$ lösen. Um dann zu zeigen, dass $L(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$ gilt, kann man die folgende Präsenzaufgabe (P17) nutzen.




(P17) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren. Zeigen Sie, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.

(LP17) Wir wissen schon, dass $\mathbb{R}^n$ eine Basis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ besitzt. Satz 2.48 besagt nun, dass jede Basis des $\mathbb{R}^n$ aus $n$ Vektoren besteht. Wegen

$$L(v_1, \ldots, v_n, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathbb{R}^n \,,$$

folgt mit dem Basisergänzungssatz (Satz 2.46), dass wir $\{v_1, \ldots, v_n\}$ durch Hinzufügen von Vektoren aus $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$ ergänzen können. Wenn jetzt $(v_1, \ldots, v_n)$ nicht schon selber eine Basis wäre, würden wir dann aber eine Basis mit mehr als $n$ Vektoren erhalten, was im Widerspruch zu unserer Erkenntnis steht, dass jede Basis des $\mathbb{R}^n$ aus $n$ Vektoren besteht. Es folgt also, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ schon selber eine Basis ist.

### Hausaufgaben

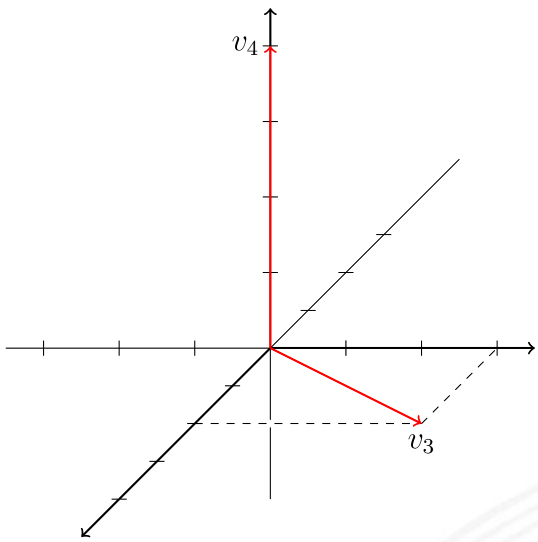
(H26) Es seien die Vektoren $v_1 = (1, -1, 2), v_2 = (3, 1, 0), v_3 = (2, 3, 0), v_4 = (0, 0, 4), v_5 = (-2, 1, 3)$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Wählen Sie aus der Menge $\{v_1, \dots, v_5\}$ Vektoren aus, sodass diese die Eigenschaft (B1) aus Definition 2.43. bzgl. des $\mathbb{R}^3$ erfüllen, (B2) aber nicht erfüllt wird. Beweisen Sie, dass Ihre Wahl korrekt ist und fertigen Sie eine Skizze an, in die Sie die Vektoren einzeichnen.

(3 Punkte)

(La) Jedes Paar $(v_i, v_j)$ mit $i \neq j$ ist eine korrekte Wahl. Da $\mathbb{R}^3$ eine Standardbasis $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ mit drei Vektoren hat, muss wegen Satz 2.48 jede Basis des $\mathbb{R}^3$ drei Vektoren haben. Wenn $(v_i, v_j)$ linear unabhängig ist, kann es daher (B2) nicht erfüllen, sonst wäre es eine Basis.

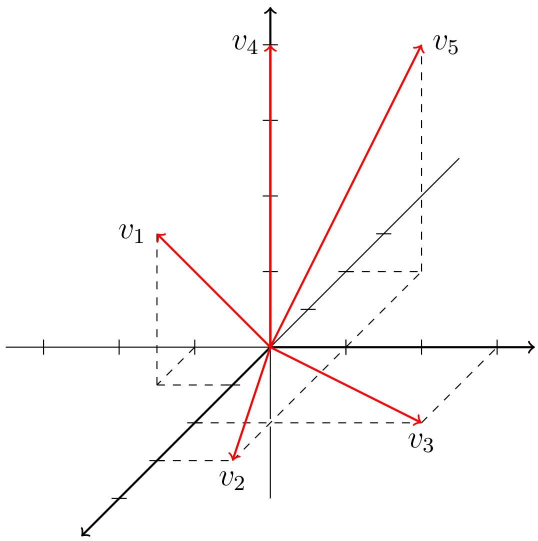
Zum Beispiel beweisen wir, dass $(v_3, v_4)$ linear unabhängig ist. Es sei $\alpha, \beta$ in $\mathbb{R}$ sodass $\alpha v_3 + \beta v_4 = \mathbf{0}$. Die letzte Koordinate zeigt, dass $\beta$ gleich Null ist, und die zweite, dass $\alpha$ gleich Null ist. Da die Schreibweise des Nullvektors als $\mathbf{0} = \alpha v_3 + \beta v_4$ eindeutig ist, ist $(v_3, v_4)$ linear unabhängig.




(b) Wählen Sie aus der Menge $\{v_1, \dots, v_5\}$ Vektoren aus, sodass diese die Eigenschaft (B2) aus Definition 2.43. bzgl. des $\mathbb{R}^3$ erfüllen, (B1) aber nicht erfüllt wird. Beweisen Sie, dass Ihre Wahl korrekt ist und fertigen Sie eine Skizze an, in die Sie die Vektoren einzeichnen.

(3 Punkte)

(Lb) Wir wählen einfach alle Vektoren aus. Da jede Basis des $\mathbb{R}^3$ drei Vektoren hat, kann das Tupel $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ nicht (B1) und (B2) gleichzeitig erfüllen. Es reicht daher zu beweisen, dass (B2) erfüllt ist, also dass $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \mathbb{R}^3$ gilt. Dazu reicht es offensichtlich, zu beweisen, dass $L(v_i, v_j, v_k) = \mathbb{R}^3$ gilt für eine Wahl $\{v_i, v_j, v_k\}$ aus $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, und das folgt aus (c).




(c) Wählen Sie aus der Menge $\{v_1, \dots, v_5\}$ Vektoren aus, sodass diese eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Beweisen Sie, dass Ihre Wahl korrekt ist und fertigen Sie eine Skizze an, in die Sie die Vektoren einzeichnen.

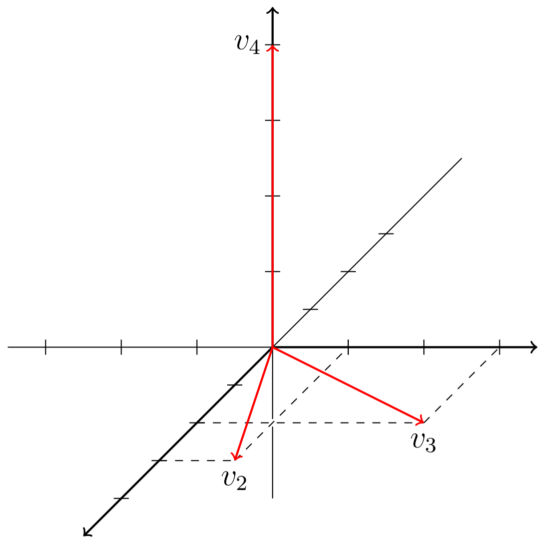
(3 Punkte)

(Lc) Wegen Präsenzaufgabe (P17) reicht es, drei Vektoren zu wählen, und zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind. Wir wählen hier $(v_2, v_3, v_4)$, aber es gibt viele weitere Möglichkeiten.

Es sei $\alpha, \beta, \gamma$ in $\mathbb{R}$ sodass $\alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_4 = \mathbf{0}$ gilt. Wir erhalten dann das Gleichungssystem

$$3\alpha + 2\beta = 0 \tag{4}$$
$$\alpha + 3\beta = 0 \tag{5}$$
$$4\gamma = 0\,. \tag{6}$$

Aus (6) folgt $\gamma = 0$, aus (5) folgt $\alpha = -3\beta$, und Einsetzen in (4) liefert $-\beta = 0$. Somit ist $\beta = 0$, $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$, und $(v_2, v_3, v_4)$ ist linear unabhängig. Wegen (P17) ist es nun eine Basis; das war die Frage in (c). Insbesondere gilt $L(v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$, was den Beweis von (b) vervollständigt.




**(9 Punkte)**

(H27) Es seien die Vektoren $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 2, -3)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $(v_1, v_2)$ linear unabhängig ist, und daher eine Basis von $L(v_1, v_2)$.

(2 Punkte)

(La) Es sei $\alpha, \beta$ in $\mathbb{R}$, sodass $\alpha(0, 1, -1)+\beta(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$. Die erste Koordinate zeigt, dass $\beta$ gleich Null ist. Die zweite Koordinate zeigt, dass $\alpha$ gleich Null ist. Das Tupel $(v_1, v_2)$ ist daher linear unabhängig. Dass es eine Basis von $L(v_1, v_2)$ ist, folgt direkt aus der Definition.

(b) Bestimmen Sie $\alpha, \beta$ in $\mathbb{R}$, sodass $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$. Ist $(v_1, v_2, v_3)$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

(Lb) Es sei $\alpha$, $\beta$ in $\mathbb{R}$, sodass $\alpha(0, 1, -1) + \beta(1, 0, -1) = (1, 2, -3)$. Wir schreiben dies als ein System von drei Gleichungen;

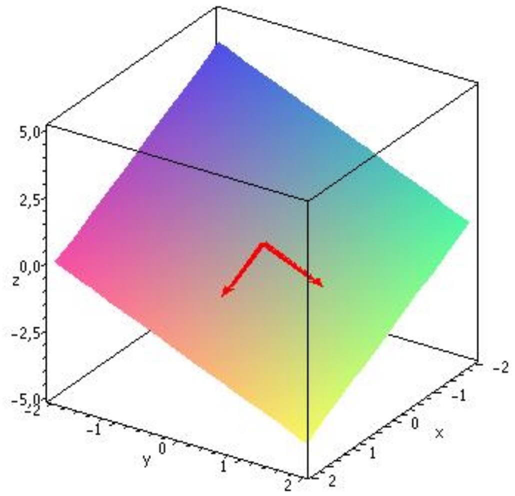
$$\begin{aligned} \beta &= 1 && (7)\\ \alpha &= 2 && (8)\\ -\alpha-\beta &= -3\,. && (9) \end{aligned}$$

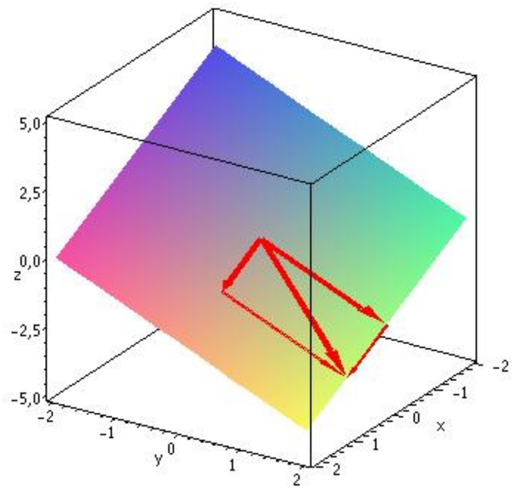
Dies ist nicht außerordentlich schwer zu lösen; $\alpha = 2$ und $\beta = 1$ (Einsetzen in die Gleichungen (7),(8) und (9) zeigt, dass dies wirklich eine Lösung ist). Da $2v_1 + v_2 - v_3 = \mathbf{0}$ gilt, ist $(v_1, v_2, v_3)$ linear abhängig.

(c) Zeichnen Sie die Ebene $L(v_1, v_2)$ und darin die Vektoren $v_1$ und $v_2$. Zeichnen Sie auch $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$ mit dem entsprechenden Parallelogramm.

*Tipp:* Um ein aussagekräftiges Bild zu bekommen, zeichnen Sie die Ebene am besten in eine „Box" ein (vgl. Lösung zu (H9c)).

(1 Punkte)




**(5 Punkte)**

(H28) Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Aussagen (*Tipp:* Sie dürfen die Sätze 2.48 und 2.46 aus der Vorlesung benutzen):

(a) Es seien Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Ist $m > n$, so ist $(v_1, \dots, v_m)$ linear abhängig.

(3 Punkte)

(La) Wie machen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $(v_1, \dots, v_m)$ ist linear unabhängig. Wir wählen weitere Vektoren $w_1, \dots, w_s \in \mathbb{R}^n$, sodass die lineare Hülle von $v_1, \dots, v_m$ und $w_1, \dots, w_s$ den $\mathbb{R}^n$ erzeugen, also

$$L(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_s) = \mathbb{R}^n$$

(wenn man unsicher ist, welche Vektoren $w_i$ man nehmen sollte, dann wählt man einfach die kanonische Basis). Nach dem Basisergänzungssatz (Satz 2.46) können wir nun durch Hinzufügen von Vektoren aus $\{w_1, \ldots, w_s\}$ die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ zu einer Basis ergänzen. Sei $m'$ die Anzahl der Vektoren diese Basis. Weil $v_1, \ldots, v_m$ in der Basis vorkommen, gilt $m' \geq m$. Andererseits haben wir im $\mathbb{R}^n$ die kanonische Basis $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Nach Satz 2.48 muss dann aber $n = m'$ gelten, ein Widerspruch, denn mit der Voraussetzung $m > n$ erhalten wir $n = m' \geq m > n$.

(b) Seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Gilt $L(v_1, \ldots, v_n) = \mathbb{R}^n$, dann ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

(3 Punkte)

(Lb) Wir müssen zeigen, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist. Hierzu nehmen wir ein $v_i \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $v_i \neq \mathbf{0}$. Dieser Vektor ist dann linear unabhängig. Nach dem Basisergänzungssatz (Satz 2.46) können wir $(v_i)$ durch Hinzufügen von Vektoren aus der Menge $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ zu einer Basis ergänzen. Würden wir hierbei nicht alle Vektoren aus $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ hinzufügen, so würden wir eine Basis mit weniger als $n$ Elementen erhalten. Dies kann aber nicht sein, denn jede Basis eines endlich erzeugten Vektorraums besteht aus gleich vielen Elementen (Satz 2.48) und wir wissen schon, dass es im $\mathbb{R}^n$ die kanonische Basis $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ gibt, die aus $n$ Vektoren besteht.

(c) Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untervektorraum mit $W \neq \{\mathbf{0}\}$. Es gibt dann linear unabhängige Vektoren $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{R}^n$, sodass $W = L(w_1, \ldots, w_m)$ und $m \leq n$.

*Hinweis:* Sie dürfen Aussage (a) benutzen, selbst wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

(2 Bonuspunkte)

(Lc) Nach Voraussetzung gibt es $w \in W$ mit $w \neq \mathbf{0}$. Wir setzen $w_1 := w$. Ist $L(w_1) = W$ sind wir fertig. Wenn nicht, gibt es $w' \in W \setminus L(w_1)$. Nach Präsenzaufgabe ($P14a$) ist dann $(w_1, w')$ linear unabhängig. Wir setzen $w_2 := w'$. Als nächstes überprüfen wir erneut, ob $W = L(w_1, w_2)$. Wenn ja, sind wir fertig. Wenn nein, muss es $w'' \in W \setminus L(w_1, w_2)$ geben, was erneut impliziert, dass $(w_1, w_2, w'')$ linear unabhängig ist. Wir setzen $w_3 := w''$. Indem wir nun diesen Prozess weiter fortsetzen, erhalten wir eine Folge von linear unabhängigen Vektoren $w_1, w_2, w_3, \ldots$ aus $W$. Weil es nach Aussage ($a$) aber höchstens $n$ linear unabhängige Vektoren geben kann, ist $W = L(w_1, \ldots, w_m)$ mit $m \leq n$.

(d) Sei $W \subsetneq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Dann gilt $\dim_{\mathbb{R}} W < n$.

*Hinweis:* Sie dürfen Aussage (c) benutzen, selbst wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

(2 Bonuspunkte)

(Ld) Ist $W = \{\mathbf{0}\}$, so folgt $\dim_{\mathbb{R}} W = 0$ und somit $\dim_{\mathbb{R}} W < n$. Ist $W \neq \{\mathbf{0}\}$, so gibt es nach Aussage (c) und Präsenzaufgabe (P17) linear unabhängige Vektoren $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{R}^n$, sodass $W = L(w_1, \ldots, w_m)$ und $m < n$. Weil diese Vektoren eine Basis von $W$ bilden, folgt $\dim_{\mathbb{R}} W = m$ und daher $\dim_{\mathbb{R}} W < n$.

**(6 Punkte)**

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 6. Juni 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.