Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 8 — SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P16) Es seien die Vektoren $v_1 = (-2, -3, 2), v_2 = (2, 4, 0), v_3 = (6, -1, 1)$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben. Fertigen Sie eine Skizze an, in die Sie die Vektoren einzeichnen und zeigen Sie, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(P17) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren. Zeigen Sie, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.

Hausaufgaben

(H26) Es seien die Vektoren $v_1 = (1, -1, 2), v_2 = (3, 1, 0), v_3 = (2, 3, 0), v_4 = (0, 0, 4), v_5 = (-2, 1, 3)$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Wählen Sie aus der Menge $\{v_1, \dots, v_5\}$ Vektoren aus, sodass diese die Eigenschaft (B1) aus Definition 2.43. bzgl. des $\mathbb{R}^3$ erfüllen, (B2) aber nicht erfüllt wird. Beweisen Sie, dass Ihre Wahl korrekt ist und fertigen Sie eine Skizze an, in die Sie die Vektoren einzeichnen.

(3 Punkte)

(b) Wählen Sie aus der Menge $\{v_1, \dots, v_5\}$ Vektoren aus, sodass diese die Eigenschaft (B2) aus Definition 2.43. bzgl. des $\mathbb{R}^3$ erfüllen, (B1) aber nicht erfüllt wird. Beweisen Sie, dass Ihre Wahl korrekt ist und fertigen Sie eine Skizze an, in die Sie die Vektoren einzeichnen.

(3 Punkte)

(c) Wählen Sie aus der Menge $\{v_1, \dots, v_5\}$ Vektoren aus, sodass diese eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Beweisen Sie, dass Ihre Wahl korrekt ist und fertigen Sie eine Skizze an, in die Sie die Vektoren einzeichnen.

(3 Punkte)

(9 Punkte)

(H27) Es seien die Vektoren $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 2, -3)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass (v_1, v_2) linear unabhängig ist, und daher eine Basis von $L(v_1, v_2)$.

(2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie α, β in $\mathbb{R}$, sodass $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$. Ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

(c) Zeichnen Sie die Ebene $L(v_1, v_2)$ und darin die Vektoren v_1 und v_2. Zeichnen Sie auch $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$ mit dem entsprechenden Parallelogramm.

Tipp: Um ein aussagekräftiges Bild zu bekommen, zeichnen Sie die Ebene am besten in eine „Box“ ein (vgl. Lösung zu (H9c)).

(1 Punkte)

(5 Punkte)

(H28) Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Aussagen (*Tipp:* Sie dürfen die Sätze 2.48 und 2.46 aus der Vorlesung benutzen):

(a) Es seien Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Ist $m > n$, so ist $(v_1, \dots, v_m)$ linear abhängig.

(3 Punkte)

(b) Seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Gilt $L(v_1, \ldots, v_n) = \mathbb{R}^n$, dann ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

(3 Punkte)

(c) Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untervektorraum mit $W \neq \{\mathbf{0}\}$. Es gibt dann linear unabhängige Vektoren $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{R}^n$, sodass $W = L(w_1, \ldots, w_m)$ und $m \leq n$.

Hinweis: Sie dürfen Aussage (a) benutzen, selbst wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

(2 Bonuspunkte)

(d) Sei $W \subsetneq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Dann gilt $\dim_{\mathbb{R}} W < n$.

Hinweis: Sie dürfen Aussage (c) benutzen, selbst wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

(2 Bonuspunkte)

(6 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 6. Juni 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.