Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 7 — SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P13) Untersuchen Sie auf lineare Unabhängigkeit.

(a) Ist $((1,0),(2,0))$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig?

(La) Nein, denn $2 \cdot (1,0) + (-1) \cdot (2,0) = (0,0)$.

(b) Ist $((1,1,1),(0,1,2))$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

(Lb) Ja. Wir müssen zeigen, dass $\alpha \cdot (1,1,1) + \beta \cdot (0,1,2) = 0$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nur erfüllt ist, wenn $\alpha = \beta = 0$. Aber dies ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\alpha &= 0 \\ -\alpha &= \beta \\ -\alpha &= 2\beta\,, \end{aligned}$$

das offensichtlich nur die Lösung $\alpha = \beta = 0$ hat.

(c) Ist $((0,0),(1,2))$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig?

(Lc) Nein, denn $37 \cdot (0,0) + 0 \cdot (1,2) = (0,0)$.

(d) Ist $((i,2),(1,-2i))$ in dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ linear unabhängig?

(Ld) Nein, denn die Gleichung $\alpha \cdot (i,2) + \beta \cdot (1,-2i) = (0,0)$ hat eine nicht-triviale Lösung für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, nämlich $i \cdot (i,2) + 1 \cdot (1,-2i) = (0,0)$.
Wir bemerken, dass $\mathbb{C}^2$ auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und dass $((i,2),(1,-2i))$ linear unabhängig ist in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$, weil es keine *reellen* Lösungen α, β gibt. Das war hier nicht die Frage; es wird aber in P15 b von Bedeutung sein.

(P14) Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, so gilt für jeden Vektor $v \in V$:

$$v \notin L(v_1, \ldots, v_n) \Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_n, v) \text{ ist linear unabhängig.}$$

(La) Ja, diese Aussage stimmt. Am leichtesten können wir sie beweisen, indem wir die logisch äquivalente Aussage

$$v \in L(v_1, \ldots, v_n) \Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_n, v) \text{ ist linear abhängig.} \tag{1}$$

zeigen.

Wir machen eine kleine Vorüberlegung: Ist $(v_1, \ldots, v_n, v)$ linear abhängig, so gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathbf{0} = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha v \tag{2}$$

gilt und nicht alle Koeffizienten Null sind. Wir wissen sogar, dass $\alpha \neq 0$ gilt, denn sonst hätten wir einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $(v_1, \ldots, v_n)$. Wenn wir nun (2) durch $-\alpha$ teilen, so erhalten wir

$$\mathbf{0} = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n + (-1) \cdot v;$$

hierbei ist $\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha}$.
Die Aussage (1) folgt jetzt leicht:

$$\begin{aligned} v \in L(v_1, \ldots, v_n) &\Leftrightarrow \exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R} : v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \\ &\Leftrightarrow \exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R} : \mathbf{0} = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n + (-1) \cdot v \\ &\Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_n, v) \text{ ist linear abhängig.} \end{aligned}$$

(b) Sind $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, so auch $(v_1, \ldots, v_{n-1})$.

(Lb) Das stimmt. Wäre $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ linear abhängig, dann gäbe es $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich 0, sodass $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} = 0$. Aber dann hätten wir auch $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich 0, mit $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ (man nimmt einfach $\alpha_n = 0$), und dass wäre im Widerspruch zu unserer Annahme, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist.

(c) Sind $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig, so auch $(v_1, \ldots, v_{n-1})$.

(Lc) Nein, dass stimmt nicht. Für jeden Vektor $v \in V \backslash \{\mathbf{0}\}$ ist (v, v) abhängig, aber (v) nicht.

(P15) Untersuchen Sie auf lineare Unabhängigkeit.

(a) Ist $(1, i)$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ linear unabhängig?

(La) Ja. Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha + \beta i = 0$, dann gilt $\alpha = \beta = 0$.

(b) Ist $((i, 2), (1, -2i))$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ linear unabhängig?

(Lb) Ja, denn die Gleichung $\alpha \cdot (i, 2) + \beta \cdot (1, -2) = (0, 0)$ hat keine nicht-triviale Lösungen für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; für die erste Koordinate gilt beispielsweise

$$\alpha i + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0\,.$$

Das wäre natürlich nicht der Fall gewesen wenn wir $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet hätten, vgl. P13 d.

Hausaufgaben

(H22) Überprüfen Sie folgende Tupel im $\mathbb{R}^4$ auf lineare Unabhängigkeit (bzw. lineare Abhängigkeit):

(a) $((1,2,-1,1),(2,1,1,2),(1,-1,2,1))$.

(La) Die Gleichung $\alpha \cdot (1,2,-1,1) + \beta \cdot (2,1,1,2) + \gamma \cdot (1,-1,2,1) = (0,0,0,0)$ für $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 && (3)\\ 2\alpha + \beta - \gamma &= 0 && (4)\\ -\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 && (5)\\ \alpha + 2\beta + \gamma &= 0\,. && (6) \end{aligned}$$

Die Gleichung (6) können wir vergessen, (3) + (5) liefert $3\beta + 3\gamma = 0$, also $\beta = -\gamma$. Einsetzen in (4) liefert $2\alpha - 2\gamma = 0$, also $\alpha = -\beta = \gamma$.

Man kontrolliert, dass dies auch wirklich Lösungen des obenstehenden Gleichungssystems sind. Das Tupel $((1,2,-1,1),(2,1,1,2),(1,-1,2,1))$ ist daher linear abhängig: $(1,2,-1,1) - (2,1,1,2) + (1,-1,2,1) = (0,0,0,0)$.

(2 Punkte)

(b) $((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1))$.

(Lb) Die Gleichung $\alpha \cdot (1,1,0,0) + \beta \cdot (0,1,1,0) + \gamma \cdot (0,0,1,1) = (0,0,0,0)$ für $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 && (7)\\ \alpha + \beta &= 0 && (8)\\ \beta + \gamma &= 0 && (9)\\ \gamma &= 0\,. && (10) \end{aligned}$$

Wegen $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$ gilt mit (8) oder (9) auch $\beta = 0$, also ist die einzige Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Das Tupel ist daher linear unabhängig.

(2 Punkte)

(c) $((1,2,3,0),(0,1,2,3),(3,0,1,2),(2,3,0,1))$.

Tipp: Das Einsetzungsverfahren und das Additionsverfahren (vgl. (P1) auf Aufgabenblatt 1) lassen sich leicht auf Gleichungssysteme mit mehr Gleichungen und Unbekannten als zwei anwenden.

(Lc) Die Gleichung $\alpha \cdot (1,2,3,0) + \beta \cdot (0,1,2,3) + \gamma \cdot (3,0,1,2) + \delta \cdot (2,3,0,1) = (0,0,0,0)$ für $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha \phantom{{}+2\beta} + 3\gamma + 2\delta &= 0 && (11)\\ 2\alpha + \beta \phantom{{}+3\gamma} + 3\delta &= 0 && (12)\\ 3\alpha + 2\beta + \gamma \phantom{{}+2\delta} &= 0 && (13)\\ 3\beta + 2\gamma + \delta &= 0\,. && (14) \end{aligned}$$

Mit (14) erhalten wir $\delta = -2\gamma - 3\beta$; wir setzen das ein in (11), (12) und (13). Dies liefert

$$\begin{aligned} \alpha - 6\beta - \gamma &= 0 &(15)\\ 2\alpha - 8\beta - 6\gamma &= 0 &(16)\\ 3\alpha + 2\beta + \gamma &= 0 &(17) \end{aligned}$$

Mit (17) erhalten wir $\gamma = -2\beta - 3\alpha$. Einsetzen in (15) und (16) liefert

$$\begin{aligned} 4\alpha - 4\beta &= 0 &(18)\\ 20\alpha - 4\beta &= 0\,. &(19) \end{aligned}$$

Aus (18) folgern wir $\alpha = \beta$; einsetzen in (19) liefert dann $16\alpha = 0$. Somit ist $\alpha = 0$, $\beta = \alpha = 0$, $\gamma = -2\beta - 3\alpha = 0$ und $\delta = -3\beta - 2\gamma = 0$.

Die einzige Lösung von $\alpha\cdot(1,2,3,0)+\beta\cdot(0,1,2,3)+\gamma\cdot(3,0,1,2)+\delta\cdot(2,3,0,1) = (0,0,0,0)$ ist die triviale Lösung, somit ist das obenstehende Tupel linear unabhängig.

(4 Punkte)

(8 Punkte)

(H23) Überprüfen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ man $((0,1,0,-a),(-1,1,-a,0),(2a,-2,2,0))$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen kann? Man gebe ohne Beweis eine mögliche Ergänzung an.

(L23) Man kann das Tupel zu einer Basis ergänzen genau dann, wenn es linear unabhängig ist. Die Frage ist daher, für welche a das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\beta + 2a\gamma &= 0 &(20)\\ \alpha + \beta - 2\gamma &= 0 &(21)\\ -a\beta + 2\gamma &= 0 &(22)\\ -a\alpha &= 0 &(23) \end{aligned}$$

nur triviale Lösungen hat.

Für $a = 0$ folgt aus (20), dass $\beta = 0$, aus (22), dass $\gamma = 0$, und somit aus (21), dass $\alpha = 0$. Das Tupel ist unabhängig, und kann daher zu einer Basis ergänzt werden.

Für $a \neq 0$ folgt aus (23), dass $\alpha = 0$. Wir formen (20), (21), und (22) um nach

$$\begin{aligned} \beta &= 2a\gamma &(24)\\ \beta &= 2\gamma &(25)\\ \beta &= 2\gamma/a\,. &(26) \end{aligned}$$

Wenn $a \neq 1$, folgt $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ((24)-(25) liefert beispielsweise $0 = 2\gamma(a-1) \Rightarrow 0 = \gamma$ und (25) dann $\beta = 0$) und das Tupel ist linear unabhängig; es kann also zu einer Basis ergänzt werden. Wir haben ein nicht-triviale Lösung genau dann, wenn $a = 1$, nämlich $\alpha = 0$, $\beta = 2$, und $\gamma = 1$.

Zusammenfassend: für $a \neq 1$ ist das Tupel linear unabhängig, und kann zu einer Basis ergänzt werden. Nur für $a = 1$ ist das Tupel linear abhängig, und kann nicht zu einer Basis ergänzt werden.

Es gibt viele Weisen um das Tupel zu einer Basis zu ergänzen. Der Vektor $(2, 0, -1, -1)$ liegt z.B. nie in $L((0, 1, 0, -a), (-1, 1, -a, 0), (2a, -2, 2, 0))$, und ergänzt es daher zu einer Basis, wenn $a \neq 1$.

(6 Punkte)

(H24) Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren, sodass $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to V \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

(L24) Offensichtlich ist f ein Homomorphismus, auch wenn $(v_1, \ldots, v_n)$ keine Basis ist, denn für alle $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} f((x_1, \ldots, x_n)) + f((y_1, \ldots, y_n)) &= (x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) + (y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n) \\ &= (x_1 + y_1) v_1 + \ldots + (x_n + y_n) v_n \\ &= f(((x_1 + y_1), \ldots, (x_n + y_n))) \\ &= f((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) \,. \end{aligned}$$

In dem ersten Schritt haben wir die Definition von f verwendet, in dem zweiten Schritt das Vektorraumaxiom V2a, in dem dritten Schritt die Definition von f, und in dem vierten Schritt die Definition der Addition in $\mathbb{R}^n$.

Wegen $L(v_1, \ldots, v_n) = \mathbb{R}^n$ ist klar, dass die Abbildung f surjektiv ist. Ist nämlich $v \in \mathbb{R}^n$, so gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \,.$$

Offensichtlich gilt dann $f((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = v$.

Sei nun $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} & f((x_1, \ldots, x_n)) = f((y_1, \ldots, y_n)) \\ \Leftrightarrow\ & x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n \,. \end{aligned}$$

Weil $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis ist, ist die Darstellung eindeutig und das impliziert $x_i = y_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es folgt somit

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \,,$$

und die Injektivität der Abbildung ist gezeigt.

Wir haben somit bewiesen, dass f ein bijektiver (injekiver und surjektiver) Gruppenhomomorphismus ist.

(6 Punkte)

(H25) [Bonusaufgabe] Es seien U, U' Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V mit

$$U \cap U' = \{\mathbf{0}\}.$$

Weiter seien $w_1, \ldots, w_r \in U$ und $w'_1, \ldots, w'_s \in U'$, sodass $(w_1, \ldots, w_r)$ und $(w'_1, \ldots, w'_s)$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, dass dann auch $(w_1, \ldots, w_r, w'_1, \ldots, w'_s)$ linear unabhängig ist.

(L25) Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ und $\beta_1, \ldots, \beta_s$ in $\mathbb{K}$, sodass

$$\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r + \beta_1 w'_1 + \ldots + \beta_s w'_s = \mathbf{0}. \tag{27}$$

Wir setzen $u := \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r$ und $u' := \beta_1 w'_1 + \ldots + \beta_s w'_s$. Dann gilt $u \in U$ und $u' \in U'$. Aber wegen $u = -u'$ gilt auch $u \in U'$ und $u' \in U$, und wegen $U \cap U' = \{\mathbf{0}\}$ erhalten wir dann $u = u' = \mathbf{0}$.

Weil $(w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängig ist, folgt aus $u := \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_r w_r = \mathbf{0}$, dass die $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ alle gleich 0 sind. Ebenso erhalten wir von der linearen unabhängigkeit von $(w'_1, \ldots, w'_s)$ und dem Verschwinden von u', dass die $\beta_1, \ldots \beta_s$ alle gleich Null sind.

Da Gleichung (27) nur triviale Lösungen hat, schlussfolgern wir, dass das Tupel $(w_1, \ldots, w_r, w'_1, \ldots, w'_s)$ linear unabhängig ist.

(3 Bonuspunkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 30. Mai 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.