Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 7 — SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P13) Untersuchen Sie auf lineare Unabhängigkeit.

(a) Ist $((1,0),(2,0))$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig?
(b) Ist $((1,1,1),(0,1,2))$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?
(c) Ist $((0,0),(1,2))$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig?
(d) Ist $((i,2),(1,-2i))$ in dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ linear unabhängig?

(P14) Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1,\ldots,v_n \in V$ Vektoren. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $(v_1,\ldots,v_n)$ linear unabhängig, so gilt für jeden Vektor $v \in V$:

$$v \notin L(v_1,\ldots,v_n) \Leftrightarrow (v_1,\ldots,v_n,v) \text{ ist linear unabhängig.}$$

(b) Sind $(v_1,\ldots,v_n)$ linear unabhängig, so auch $(v_1,\ldots,v_{n-1})$.
(c) Sind $(v_1,\ldots,v_n)$ linear abhängig, so auch $(v_1,\ldots,v_{n-1})$.

(P15) Untersuchen Sie auf lineare Unabhängigkeit.

(a) Ist $(1,i)$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ linear unabhängig?
(b) Ist $((i,2),(1,-2i))$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ linear unabhängig?

Hausaufgaben

(H22) Überprüfen Sie folgende Tupel im $\mathbb{R}^4$ auf lineare Unabhängigkeit (bzw. lineare Abhängigkeit):

(a) $((1,2,-1,1),(2,1,1,2),(1,-1,2,1))$.

(2 Punkte)

(b) $((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1))$.

(2 Punkte)

(c) $((1,2,3,0),(0,1,2,3),(3,0,1,2),(2,3,0,1))$.

Tipp: Das Einsetzungsverfahren und das Additionsverfahren (vgl. (P1) auf Aufgabenblatt 1) lassen sich leicht auf Gleichungssysteme mit mehr Gleichungen und Unbekannten als zwei anwenden.

(4 Punkte)

(8 Punkte)

(H23) Überprüfen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ man $((0,1,0,-a),(-1,1,-a,0),(2a,-2,2,0))$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen kann? Man gebe ohne Beweis eine mögliche Ergänzung an.

(6 Punkte)

(H24) Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1,\dots,v_n \in V$ Vektoren, sodass $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von V ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to V \\ (x_1,\dots,x_n) &\mapsto x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

(6 Punkte)

(H25) [Bonusaufgabe] Es seien U, U' Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V mit

$$U \cap U' = \{\mathbf{0}\}\,.$$

Weiter seien $w_1,\dots,w_r \in U$ und $w'_1,\dots,w'_s \in U'$, sodass $(w_1,\dots,w_r)$ und $(w'_1,\dots,w'_s)$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, dass dann auch $(w_1,\dots,w_r,w'_1,\dots,w'_s)$ linear unabhängig ist.

(3 Bonuspunkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 30. Mai 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.