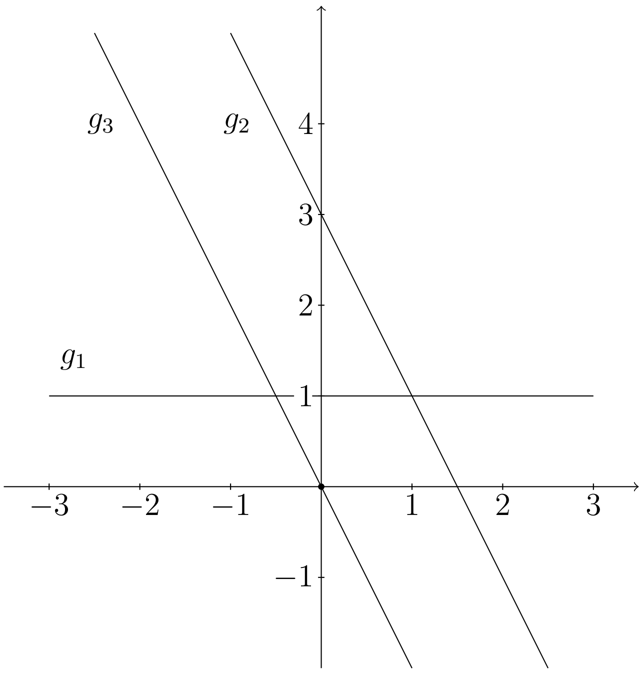
Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 6 SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P11) Skizzieren Sie die Gerade $g_1 = g_{(-1,1),(1,1)}$, $g_2 : 2x + y = 3$ und $g_3 = \mathbb{R}(-1, 2)$.



(LP11)

(a) Welche Steigung hat g_1 ?

(La) Die Steigung ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-1}{1-(-1)} = 0$.

(b) Bestimmen Sie eine Koordinatendarstellung von g_1 und g_3.

(Lb) Es gilt $g_1 = \{(-1, 1) + \alpha(2, 0) \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$, weil $(1, 1) - (-1, 1) = (2, 0)$. Die y-Koordinate ist stets 1, und die x-Koordinate $x = -1+2\alpha$ durchläuft die reellen Zahlen wenn α die reellen Zahlen durchläuft. Es gilt daher $g_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1\}$, und die Koordinatendarstellung ist $g_1 \ : \ y = 1$.

Analog zu obigem Ausdruck schreiben wir $g_3 = \{(-\alpha, 2\alpha) \,;\, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Für jeden Punkt $(x, y) \in g_3$ gilt $x = -\alpha$, $y = 2\alpha$, also $y = -2x$. Umgekehrt kann jeder Punkt (x, y) mit $y = -2x$ natürlich auch geschrieben werden als $(x, y) = (-\alpha, 2\alpha)$ mit $\alpha = -x$, also $g_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -2x\}$. Die Koordinatendarstellung ist daher $g_3 \ : \ 2x + y = 0$.

(c) Haben g_1 bzw. g_2 einen Schnittpunkt mit g_3 ?

(Lc) Die Geraden g_1 und g_3 haben genau einen Schnittpunkt, nämlich $(-\frac{1}{2}, 1)$; es gilt

$$g_1 \cap g_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x + y = 0 \,\text{und}\, y = 1\} = \{(-\tfrac{1}{2}, 1)\}\,.$$

Die Geraden g_2 und g_3 haben keine Schnittpunkte;

$$g_2 \cap g_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x + y = 0 \,\text{und}\, 2x + y = 3\} = \emptyset\,.$$

(P12) Es sei die Gerade $g = (-1,-1) + \mathbb{R}(0,3)$ gegeben. Berechnen Sie eine Koordinatendarstellung von g.

(LP12) Wir schreiben g als $g = \{(-1, -1 + 3\alpha) \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Die x-Koordinate ist stets -1, und die y-Koordinate $y = -1 + 3\alpha$ durchläuft die reellen Zahlen, wenn α die reellen Zahlen durchläuft. Es gilt daher $g = \{(x,y) \in \mathbb{R} \,:\, x = -1\}$, also $g : x = -1$.

Alternative Lösung: Wir machen den Ansatz $g : ax + by = c$ und wollen nun $a, b, c \in \mathbb{R}$ bestimmen. Hierbei müssen wir im Hinterkopf behalten, dass wir für a, b, c keine eindeutige Lösung finden werden (vgl. Bemerkung 2.29). Sicherlich liegen die Punkte $(-1,-1) = (-1,-1) + 0 \cdot (0,3)$ und $(-1,2) = (-1,-1) + 1 \cdot (0,3)$ auf der Gerade g. Dies liefert uns folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -a - b &= c \\ -a + 2b &= c \end{aligned}$$

Wenn wir nun die erste Gleichung von der zweiten Gleichung anziehen, erhalten wir

$$3b = 0\,.$$

Somit ist $b = 0$. Die Koordinatendarstellung der Geraden muss also von der Form $ax = c$ sein, wobei $a \neq 0$ gilt (sonst erhalten wir keine Gerade). Wenn wir nun einen beliebigen Punkt der Gerade in diese Gleichung einsetzen, erhalten wir $-a = c$. Jede Wahl von $a, c \in \mathbb{R}$ mit $-a = c$ und $a \neq 0$ liefert uns dann eine Koordinatendarstellung von g (vgl. Bemerkung 2.29). Eine mögliche Darstellung wäre also beispielsweise

$$g : x = -1\,.$$

Hausaufgaben

(H19) Wir rechnen in der Standardebene, wobei wir alle Geraden in Parameterdarstellung angeben. Beweisen Sie folgende Aussage: Zu jedem Punkt P und jeder Gerade $g_{A,B}$ der Standardebene gibt es genau eine Gerade $g_{A',B'}$ mit $P \in g_{A',B'}$ und $g_{A,B}||g_{A',B'}$.

(6 Punkte)

(LH19) Da die Gerade $g_{A',B'}$ den Punkt P enthalten soll, machen wir den Ansatz $A' := P$ (wir wählen also P als Aufpunkt) und müssen nun B' so bestimmen, dass $g_{A,B}||g_{P,B'}$ gilt. Nach Satz 2.24.3 ist dies genau dann erfüllt, wenn $\mathbb{R}(B - A) = \mathbb{R}(B' - P)$ gilt. Wenn wir nun $B' := P + (B - A)$ setzen, dann erhalten wir offensichtlich das Gewünschte, denn es gilt

$$B' - P = (P + (B - A)) - P = (B - A)\,.$$

Es folgt also, dass $g_{P,P+(B-A)}$ parallel zu $g_{A,B}$ ist und gleichzeitig den Punkt P enthält. Wir wollen nun zeigen, dass diese Gerade die einzige Gerade ist mit diesen Eigenschaften. Angenommen es gäbe eine weitere Gerade $g_{C,D}$ mit $P \in g_{C,D}$ und $g_{A,B}||g_{C,D}$, für die $g_{C,D} \neq g_{P,P+(B-A)}$ gilt. Mit Satz 2.24.3 folgt dann $\mathbb{R}(D - C) = \mathbb{R}(B - A)$. Weil dann aber auch $\mathbb{R}(D - C) = \mathbb{R}((P + (B - A)) - P)$ gilt, folgt ebenfalls mit Satz 2.24.3, dass $g_{C,D}$ parallel zu $g_{P,P+(B-A)}$ ist. Da gleichzeitig nun aber auch $P \in g_{C,D} \cap g_{P,P+(B-A)}$ erfüllt ist (und somit $g_{C,D} \cap g_{P,P+(B-A)} = \emptyset$ nicht möglich ist) folgt $g_{C,D} = g_{P,P+(B-A)}$, ein Widerspruch.

(H20) Gegeben sind die drei Geraden $g_1 = g_{(1,0),(0,2)}, g_2 : x + 2y = -2$ und $g_3 = (1, 1) + \mathbb{R}(2, 2)$. Untersuchen Sie welche dieser Geraden zueinander parallel sind, und welche nicht. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

(LH20) Zuerst bestimmen wir eine Koordinatendarstellung für allen Geraden. Für g_1 haben wir $\Delta x = -1$, $\Delta y = 2$, und mit dem Aufpunkt $(0, 2)$ erhalten wir daher $g_1 = (0, 2) + \mathbb{R}(-1, 2)$. In dem Skript ist schon gezeigt, dass die Parameterdarstellung $(0, t) + \mathbb{R}(\Delta x, \Delta y)$ übereinstimmt mit einer Geraden $y = mx + t$. g_1 ist daher genau die Gerade $y = -2x + 2$, also $g_1 : 2x + y = 2$.

Die Gerade g_2 ist schon in Koordinatendarstellung gegeben, und g_3 schreiben wir als $g_3 = \{(1 + 2\alpha, 1 + 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Es gibt daher für g_3 die Koordinatendarstellung $g_3 : x - y = 0$.

Wir untersuchen nun $g_1 \cap g_2$, $g_2 \cap g_3$ und $g_3 \cap g_1$.

$$\begin{aligned}
g_1 \cap g_2 &= \{(x, y) : 2x + y = 2 \;\wedge\; x + 2y = -2\} = \{(2, -2)\}\,.\\
g_2 \cap g_3 &= \{(x, y) : 2x + y = -2 \;\wedge\; x - y = 0\} = \{(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3})\}\,.\\
g_3 \cap g_1 &= \{(x, y) : x - y = 0 \;\wedge\; 2x + y = 2\} = \{(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3})\}\,.
\end{aligned}$$

Offensichtlich sind keine dieser Geraden zueinander parallel, und die Schnittpunkte sind in obigem Ausdruck gegeben.

(6 Punkte)

(H21) Wir betrachten nun die lineare Hülle von Vektoren.

(a) Seien $v_1 = (1, 3, -1), v_2 = (-4, 5, -2), w_1 = (7, 4, -1)$ und $w_2 = (10, -21, 8)$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass

$$L(v_1, v_2) = L(w_1, w_2)\,.$$

(La) Wir zeigen, dass es reelle Zahlen α_1, α_2 und β_1, β_2 gibt, sodass $w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ und $w_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$. Aus $w_1 \in L(v_1, v_2)$ und $w_2 \in L(v_1, v_2)$ folgt dann, dass $L(w_1, w_2) \subseteq L(v_1, v_2)$, da man jedes Element $aw_1 + bw_2 \in L(w_1, w_2)$ dann schreiben kann als $a(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + b(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = (a\alpha_1 + b\beta_1)v_1 + (a\alpha_2 + b\beta_2)v_2$. (Der letzte Ausdruck ist offensichtlich ein Element von $L(v_1, v_2)$.)

Das Umgekehrte ist natürlich auch der Fall: wenn wir $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ finden, sodass $v_1 = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$ und $v_2 = \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2$, dann haben wir damit gezeigt, dass $L(v_1, v_2) \subseteq L(w_1, w_2)$.

Die Gleichung $\alpha_1(1, 3, -1) + \alpha_2(-4, 5, -2) = (7, 4, -1)$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 4\alpha_2 &= 7 && (1)\\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 &= 4 && (2)\\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 &= -1 && (3) \end{aligned}$$

Die Gleichung (1) + (3) liefert $-6\alpha_2 = 6$, also $\alpha_2 = -1$. Aus Gleichung (3) folgt dann $\alpha_1 = 1 - 2\alpha_2 = 3$. Man muss dann noch kontrollieren, dass (α_1, α_2) in der Tat eine Lösung von Gleichung (2) ist: $3 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) = 4$.

Analog zu obiger Rechnung löst man die Gleichung $\beta_1(1, 3, -1) + \beta_2(-4, 5, -2) = (10, -21, 8)$, mit dem Resultat $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = -3$.

Aus

$$\begin{aligned} w_1 &= 3v_1 - v_2 && (4)\\ w_2 &= -2v_1 - 3v_2 && (5) \end{aligned}$$

folgt nun, dass $L(w_1, w_2) \subseteq L(v_1, v_2)$.

Um zu beweisen, dass $L(v_1, v_2) \subseteq L(w_1, w_2)$ gilt, können wir natürlich eine analoge Rechnung führen. Einfacher ist es aber, zu bemerken, dass der Vektor v_2 verschwindet in der Gleichung (5) $-$ 3 $\cdot$(4). Dies liefert $w_2 - 3w_1 = -11v_1$, und daher $v_1 = \frac{3}{11}w_1 - \frac{1}{11}w_2$. Ebenso verschwindet der Vektor v_1 in der Gleichung $2 \cdot (4) + 3 \cdot (5)$, also in $2w_1 + 3w_2 = -11v_2$. Wir erhalten $v_2 = -\frac{2}{11}w_1 - \frac{3}{11}w_2$, und haben damit auch $L(v_1, v_2) \subseteq L(w_1, w_2)$ gezeigt. Wir schlussfolgern, dass $L(v_1, v_2) = L(w_1, w_2)$ gilt.

(4 Punkte)

(b) Sei nun $n, m \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ Vektoren. Weiter sei

$$w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n\,,$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass

$$L(v_1, \ldots, v_n) = L(v_1, \ldots, v_n, w)\,.$$

(Lb) $L(v_1, \ldots, v_n, w)$ ist der kleinste Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$, der $v_1, \ldots, v_n$ und w enthält. Jeder Vektorraum V, der $v_1, \ldots, v_n$ enthält, enthält aber automatisch auch $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Daher ist $L(v_1, \ldots, v_n, w)$ der kleinste Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$, der $v_1, \ldots v_n$ enthält. Das heißt, $L(v_1, \ldots, v_n, w) = L(v_1, \ldots, v_n)$.

Alternativ können wir das auch elementar zeigen: Wir zeigen die Inklusion „$\subseteq$“: Sei $x \in L(v_1, \ldots, v_n)$ beliebig. Es gibt dann $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \,.$$

Wir haben also x als eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ dargestellt. Damit können wir aber auch eine Darstellung von x als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n, w$ angeben, nämlich

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + 0 \cdot w \,.$$

Somit folgt dann auch $x \in L(v_1, \ldots, v_n, w)$.
Als nächstes zeigen wir die Inklusion „$\supseteq$“: Sei $x \in L(v_1, \ldots, v_n, w)$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass wir x als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ darstellen können. Aus $x \in L(v_1, \ldots, v_n, w)$ folgt, dass es $\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n + \beta w \,.$$

Wegen $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ folgt nun weiter

$$\begin{aligned} x =& \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n + \beta w \\ =& \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n + \beta(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) \\ =& \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n + \beta\alpha_1 v_1 + \ldots + \beta\alpha_n v_n \\ =& (\beta_1 + \beta\alpha_1) v_1 + \ldots + (\beta_n + \beta\alpha_n) v_n \,. \end{aligned}$$

Die Elemente $(\beta_i + \beta\alpha_i)$ sind reelle Zahlen und somit liefert uns die letzte Zeile eine Darstellung von x als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$. Es folgt also $x \in L(v_1, \ldots, v_n)$.

(4 Punkte)

(8 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 23. Mai 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.