Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 5 SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P9) Sei $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ die Menge der Funktionen mit Definitionsbereich und Bildbereich $\mathbb{R}$. Analog zu dem Beispiel 2.6. wird auf V eine Addition und eine Skalarmultiplikation definiert, indem man für $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktionen $f + g$ und $\alpha \cdot f$ durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

definiert. Hierdurch wird $(V, +, \cdot)$ zu einen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U := \{f \in V \,:\, (\exists a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0)\}$$

der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 ein Untervektorraum von V ist.

(LP9) Wir benutzen Satz 2.15.

- Die Nullfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 0$ ist offensichtlich in U, da $0 = 0x^2 + 0x + 0$.
- Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto a_2x^2 + a_1x + a_0$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto b_2x^2 + b_1x + b_0$ Elemente von U; hierbei sind a_2, a_1, a_0 und b_2, b_1, b_0 aus $\mathbb{R}$. Dann gilt, wegen der Definition von „+“, dass

  $$(f + g)(x) := f(x) + g(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)\,.$$

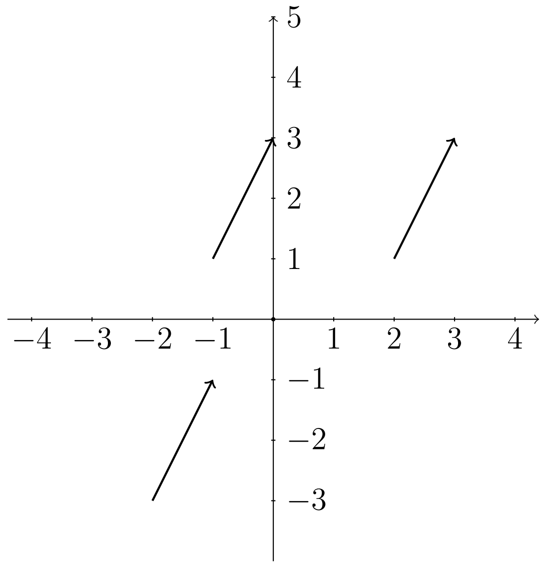
  Somit ist $f + g$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich 2, also ein Element von U.
- Es seien $k \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto a_2x^2 + a_1x + a_0$ in U (mit $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$). Dann gilt, wegen der Definition von „·“, dass $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (\lambda a_2)x^2 + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0)$. Somit ist $\lambda \cdot f$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich 2, also ein Element von U.

Da U nicht leer ist, und abgeschlossen bzgl. der Addition und Skalarmultiplikation, schlussfolgern wir mit Satz 2.15, dass es ein Untervektorraum ist.

(P10) Entsprechend der Definition 2.10 bezeichnen wir mit $\tau_v \in T(\mathbb{R}^2)$ die Verschiebungen um den Vektor $v \in \mathbb{R}^2$. Sie können sich die Verschiebung τ_v veranschaulichen, indem Sie Pfeile in die Ebene $\mathbb{R}^2$ einzeichnen, bei denen der Anfangspunkt durch einen Punkte $P \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist und der Endpunkt durch $\tau_v(P)$. Veranschaulichen Sie

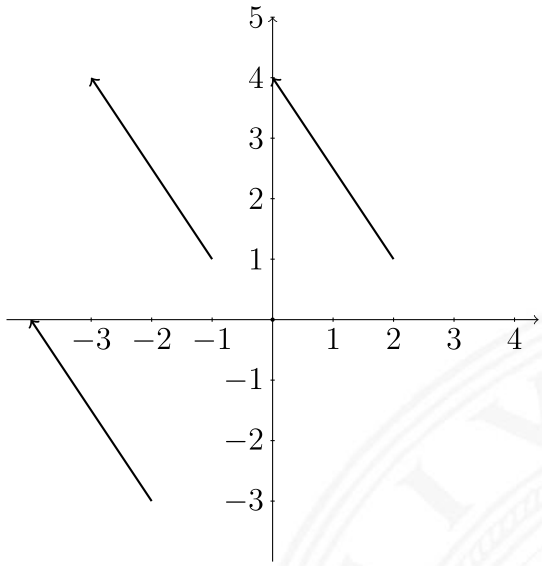
(a) $v_{(1,2)}$, indem Sie Pfeile für die Punkte $P_1 = (2,1), P_2 = (-1,1)$ und $P_3 = (-2,-3)$ einzeichnen.

(LP10a)



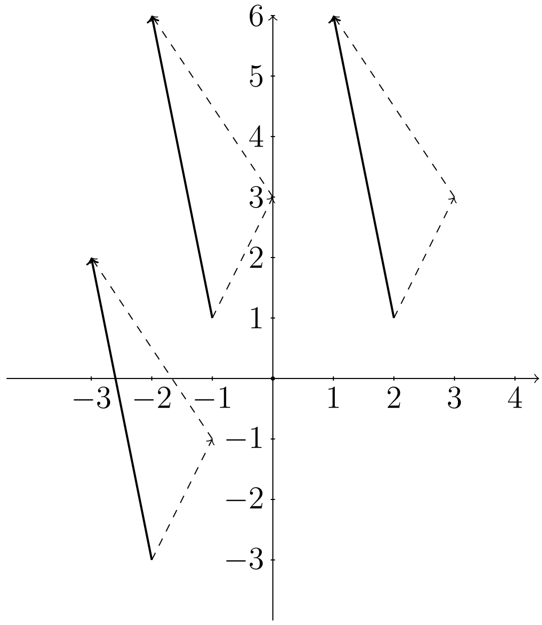
(b) $v_{(-2,3)}$, indem Sie Pfeile für die Punkte $P_1 = (2,1), P_2 = (-1,1)$ und $P_3 = (-2,-3)$ einzeichnen.

(LP10b)



(c) $v_{(-2,3)} \circ v_{(1,2)}$, indem Sie Pfeile für die Punkte $P_1 = (2,1), P_2 = (-1,1)$ und $P_3 = (-2,-3)$ einzeichnen.

(LP10c)



Hausaufgaben

(H16) Es sei V der in Aufgabe (P9) definierte Vektorraum und U der in der gleichen Aufgabe definierte Untervektorraum von V. Weiter seien $p_1, p_2, p_3, p \in U$ definiert durch

$$\begin{aligned} p_1(x) =& 2x^2 + x, && \forall x \in \mathbb{R} \\ p_2(x) =& x, && \forall x \in \mathbb{R} \\ p_3(x) =& x^2 + 3, && \forall x \in \mathbb{R} \\ p(x) =& x^2 - 5x + 3, && \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie ein Tripel $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, sodass

$$\alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2 + \gamma \cdot p_3 = p\,, \tag{1}$$

hierbei ist $\alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2 + \gamma \cdot p_3$ durch

$$(\alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2 + \gamma \cdot p_3)(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

definiert (es gibt einen Bonuspunkt, wenn Sie zeigen, dass es nur ein solches Tripel gibt).

(6 Punkte)

(LH16) Wir bestimmen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so dass $\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = p$. Diese Gleichung gilt genau dann, wenn

$$\alpha(2x^2 + x) + \beta x + \gamma(x^2 + 3) = x^2 - 5x + 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

also wenn

$$(2\alpha+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\gamma 3 = x^2-5x+3 \quad \forall x\in\mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Offensichtlich ist es hierfür hinreichend, dass α,β, und γ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\alpha+\gamma &= 1 && (3)\\ \alpha+\beta &= -5 && (4)\\ 3\gamma &= 3\,, && (5) \end{aligned}$$

erfüllen; (3) $\wedge$ (4) $\wedge$ (5) $\Rightarrow$ (2).

Aber es ist auch notwendig (hierfür gibt es den Bonuspunkt). Wenn $p=q$ für zwei Polynome p und q gilt, dann folgt $p(0)=q(0)$, $p'(0)=q'(0)$, und $\frac{1}{2}p''(0)=\frac{1}{2}q''(0)$. Nehmen wir $p(x)=x^2-5x+3$ und $q(x)=(2\alpha+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\gamma 3$, dann entstehen genau die Gleichungen (3), (4) und (5). Somit gilt auch die Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) $\wedge$ (4) $\wedge$ (5).

Um α, β und γ zu bestimmen, sodass (1) gilt, ist es also notwendig und ausreichend das System der Gleichungen (3), (4) und (5) zu lösen.

Bei genauer Betrachtung sehen wir, dass das obiges Gleichungssystem genau das Gleichungssystem aus Aufgabe H15b ist. Dies Lösungen sind dementsprechend $\alpha = 0$, $\beta=-5$ und $\gamma=1$.

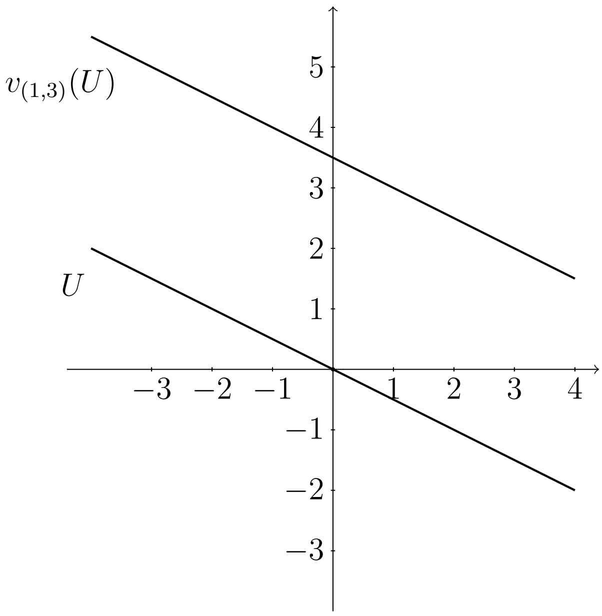
(H17) Wir betrachten erneut Verschiebungen (vgl. Sie auch Aufgabe (P10)).

(a) Sei $v_{(1,3)}\in T(\mathbb{R}^2)$ die Verschiebung um $(1,3)$ und U die Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ die durch $U:=\{\alpha\cdot(2,-1)\,:\,\alpha\in\mathbb{R}\}$ definiert ist. Bestimmen und skizzieren Sie $v_{(1,3)}(U)$.

(3 Punkte)

(La) Für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ gilt $v_{(1,3)}(2\alpha,-\alpha)=(2\alpha,-\alpha)+(1,3)=(2\alpha+1,-\alpha+3)$. Wir haben daher

$$\begin{aligned} v_{(1,3)}(U) &:= \{v_{(1,3)}(u)\,:\,u\in U\}\\ &= \{v_{(1,3)}(2\alpha,-\alpha)\,:\,\alpha\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(2\alpha+1,-\alpha+3)\,:\,\alpha\in\mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$



(b) Sei nun die Teilmenge $U' := \{\alpha \cdot (-3,-1) + (2,5) \;:\; \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass $v_{(1,a)}(U')$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(3 Punkte)

(Lb) Es ist notwendig, dass $\mathbf{0} \in v_{(1,a)}(U')$, sonst wäre es auf jedem Fall kein Untervektorraum (Bemerkung 2.16). Wenn $v_{(1,a)}(U')$ ein Untervektorraum ist, gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha \cdot (-3,-1) + (2,5) + (1,a) = (0,0)$ gilt, also $(3\alpha, \alpha) = (3, 5+a)$. Somit ist $\alpha = 1$, und $a = -4$. Das Bild ist dann

$$\begin{aligned} v_{(1,-4)}(U') &= \{\alpha \cdot (-3,-1) + (3,1) \;:\; \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha - 1) \cdot (-3,-1) \;:\; \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\beta \cdot (-3,-1) \;:\; \beta \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

Wir müssen noch kontrollieren, dass die Menge $W := \{\beta \cdot (-3,-1) \;:\; \beta \in \mathbb{R}\}$ tatsächlich ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist. Dies ist aber genau die Aussage von Satz 2.17 des Skripts.

(c) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $T(\mathbb{R}^n)$ die Menge der Verschiebungen auf dem n-dimensionalen Standardraum $\mathbb{R}^n$. Ergänzen Sie den Beweis zu Satz 2.11 und zeigen Sie, dass $T(\mathbb{R}^n)$ bzgl. Komposition eine abelsche Gruppe ist.

(4 Punkte)

(Lc) Im Skript ist schon bewiesen worden, dass $v_x \circ v_y = v_{x+y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Es folgt, dass $v_{\mathbf{0}}$ das neutrale Element von $T(\mathbb{R}^n)$ ist, denn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (und damit für alle $\tau_x \in T(\mathbb{R}^n)$) gilt

$$v_x \circ v_{\mathbf{0}} = v_{x+\mathbf{0}} = v_x = v_{\mathbf{0}+x} = v_{\mathbf{0}} \circ v_x\,,$$

hierbei haben wir benutzt, dass $\mathbf{0}$ das neutrale Element bzgl. $(\mathbb{R}^n, +)$ ist.

Das die Komposition assoziativ ist gilt allgemein für Abbildungen und hatten wir in der Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“ schon gezeigt.

Zu v_x mit $x \in \mathbb{R}^n$ ist v_{-x} das inverse Element, denn es gilt

$$v_x \circ v_{-x} = v_{x+(-x)} = v_{\mathbf{0}}\,.$$

Somit haben wir gezeigt, dass $(T(\mathbb{R}^n), \circ)$ eine Gruppe ist. Dass sie auch abelsch ist, folgt weil $(\mathbb{R}^n, +)$ abelsch ist, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v_x \circ v_y = v_{x+y} = v_{y+x} = v_y \circ v_x\,.$$

(10 Punkte)

(H18) Sei $n \in \mathbb{N}$. Führen Sie den Beweis zu Satz 2.19 und zeigen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$u \in \mathbb{R}v \Longleftrightarrow \mathbb{R}u = \mathbb{R}v\,.$$

(4 Punkte)

(LH18) Der Beweis von „$\Leftarrow$“ ist nicht schwer; wenn $\mathbb{R}u = \mathbb{R}v$, dann gilt $u \in \mathbb{R}u = \mathbb{R}v$.

Für die Richtung „$\Rightarrow$“ bemerken wir, dass $u \in \mathbb{R}v$ genau dann gilt, wenn es $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $u = \alpha v$. Aus $u \neq 0$ folgt nun $\alpha \neq 0$, sodass $\mathbb{R}v = \{\beta v\,;\, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\beta\alpha^{-1}u\,;\, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\gamma u\,;\, \gamma \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}u$.

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 16. Mai 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.