Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 5 SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P9) Sei $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ die Menge der Funktionen mit Definitionsbereich und Bildbereich $\mathbb{R}$. Analog zu dem Beispiel 2.6. wird auf V eine Addition und eine Skalarmultiplikation definiert, indem man für $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktionen $f + g$ und $\alpha \cdot f$ durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \text{ und } (\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

definiert. Hierdurch wird $(V, +, \cdot)$ zu einen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U := \{f \in V \,:\, (\exists a_2, a_1, a_0, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0)\}$$

der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 ein Untervektorraum von V ist.

(P10) Entsprechend der Definition 2.10 bezeichnen wir mit $\tau_v \in T(\mathbb{R}^2)$ die Verschiebungen um den Vektor $v \in \mathbb{R}^2$. Sie können sich die Verschiebung τ_v veranschaulichen, indem Sie Pfeile in die Ebene $\mathbb{R}^2$ einzeichnen, bei denen der Anfangspunkt durch einen Punkte $P \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist und der Endpunkt durch $\tau_v(P)$. Veranschaulichen Sie

(a) $v_{(1,2)}$, indem Sie Pfeile für die Punkte $P_1 = (2,1), P_2 = (-1,1)$ und $P_3 = (-2,-3)$ einzeichnen.

(b) $v_{(-2,3)}$, indem Sie Pfeile für die Punkte $P_1 = (2,1), P_2 = (-1,1)$ und $P_3 = (-2,-3)$ einzeichnen.

(c) $v_{(-2,3)} \circ v_{(1,2)}$, indem Sie Pfeile für die Punkte $P_1 = (2,1), P_2 = (-1,1)$ und $P_3 = (-2,-3)$ einzeichnen.

Hausaufgaben

(H16) Es sei V der in Aufgabe (P9) definierte Vektorraum und U der in der gleichen Aufgabe definierte Untervektorraum von V. Weiter seien $p_1, p_2, p_3, p \in U$ definiert durch

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 2x^2 + x, && \forall x \in \mathbb{R} \\ p_2(x) &= x, && \forall x \in \mathbb{R} \\ p_3(x) &= x^2 + 3, && \forall x \in \mathbb{R} \\ p(x) &= x^2 - 5x + 3, && \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie ein Tripel $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, sodass

$$\alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2 + \gamma \cdot p_3 = p\,, \tag{1}$$

hierbei ist $\alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2 + \gamma \cdot p_3$ durch

$$(\alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2 + \gamma \cdot p_3)(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

definiert (es gibt einen Bonuspunkt, wenn Sie zeigen, dass es nur ein solches Tripel gibt).

(6 Punkte)

(H17) Wir betrachten erneut Verschiebungen (vgl. Sie auch Aufgabe (P10)).

(a) Sei $v_{(1,3)} \in T(\mathbb{R}^2)$ die Verschiebung um $(1,3)$ und U die Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ die durch $U := \{\alpha \cdot (2,-1) \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ definiert ist. Bestimmen und skizzieren Sie $v_{(1,3)}(U)$.

(3 Punkte)

(b) Sei nun die Teilmenge $U' := \{\alpha \cdot (-3,-1) + (2,5) \,:\, \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass $v_{(1,a)}(U')$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(3 Punkte)

(c) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $T(\mathbb{R}^n)$ die Menge der Verschiebungen auf dem n-dimensionalen Standardraum $\mathbb{R}^n$. Ergänzen Sie den Beweis zu Satz 2.11 und zeigen Sie, dass $T(\mathbb{R}^n)$ bzgl. Komposition eine abelsche Gruppe ist.

(4 Punkte)

(10 Punkte)

(H18) Sei $n \in \mathbb{N}$. Führen Sie den Beweis zu Satz 2.19 und zeigen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$u \in \mathbb{R}v \iff \mathbb{R}u = \mathbb{R}v\,.$$

(4 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 16. Mai 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.