Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 4 — SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P7) In Beispiel 2.6. hatten wir auf der Menge $V := \mathbb{R}^{[0,1]}$ der $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ eine Addition und eine Skalarmultiplikation eingeführt. Für $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ wurde hierbei $f+g$ und $\alpha \cdot f$ durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x) \quad \text{für alle } x \in [0,1]$$

definiert.
Zeigen Sie, dass das Vektorraumaxiom V2b erfüllt ist, also dass $(\alpha+\beta)\cdot f = \alpha\cdot f + \beta\cdot f$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $f \in V$ gilt.

(LP7) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} ((\alpha+\beta)\cdot f)(x) &= (\alpha+\beta)(f(x)) && \text{(Definition von } \cdot) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(x) && \text{(denn } \alpha,\ \beta \text{ und } f(x) \text{ sind reelle Zahlen)} \\ &= (\alpha \cdot f)(x) + (\beta \cdot f)(x) && \text{(Definition von } \cdot) \\ &= (\alpha \cdot f + \beta \cdot f)(x) && \text{(Definition von } +). \end{aligned}$$

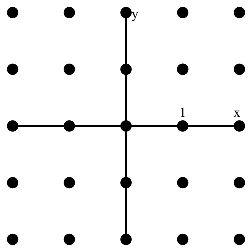
Nun gilt $f = g$ genau dann, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Aus obiger Gleichung folgt daher $(\alpha+\beta)\cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$.

(P8) Wir untersuchen im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die folgenden Teilmengen

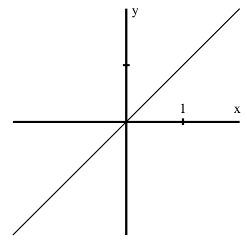
$$T_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y \in \mathbb{Z}\} \qquad T_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = x\}$$
$$T_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 1\} \qquad T_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y \geq 0\}$$
$$T_5 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$$

Fertigen Sie für jede dieser Teilmengen T_i eine Skizze an und entscheiden Sie, ob es sich bei $(T_i, +, \cdot)$ um einen $\mathbb{R}$-Vektorraum handelt („+“ und „·“ sind hierbei die Verknüpfungen auf $\mathbb{R}^2$).

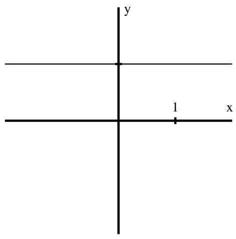
(LP8) T_1 ist eine abelsche Gruppe, aber kein Vektorraum: $(1,0) \in T_1$, aber $\frac{1}{2} \cdot (1,0) = (\frac{1}{2}, 0) \notin T_1$.



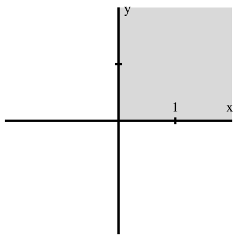
T_2 ist ein Vektorraum: Die beiden Verknüpfungen auf $\mathbb{R}^2$ sind auch Verknüpfungen auf T_2. Ist nämlich $k \in \mathbb{R}$ und $(x, y) \in T_2$, so gilt $x = y$ und wegen $kx = ky$ auch $k \cdot (x, y) = (kx, ky) \in T_2$. Sind $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in T_2$ so gilt wegen $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ auch $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ und daher $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in T_2$. Die Menge T_2 ist also abgeschlossen bzgl. der auf $\mathbb{R}^2$ gegebenen Verknüpfungen. Dass die Axiome V1 und V2a-d erfüllt sind, überprüfe der Leser bitte selbstständig.



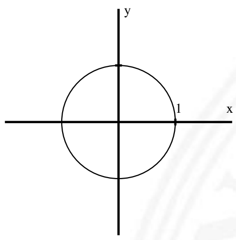
T_3 ist kein Vektorraum: $(0, 1) \in T_3$, aber $\frac{1}{2} \cdot (0, 1) = (0, \frac{1}{2}) \notin T_3$.



T_4 ist keine abelsche Gruppe, und daher kein Vektorraum: $(1,1) \in T_4$, aber $-(1,1) = (-1,-1) \notin T_4$.



T_5 ist kein Vektorraum: $(1,0) \in T_5$, aber $2 \cdot (1,0) = (2,0) \notin T_5$.



Hausaufgaben

(H12) Vervollständigen Sie das Beispiel 2.6. und zeigen Sie, dass auch die Verktorraumaxiome V2c und V2d erfüllt sind, also dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $f \in V$

$$(\alpha\beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f) \quad \text{und} \quad 1 \cdot f = f$$

gilt. **(5 Punkte)**

(LH12) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}
((\alpha\beta) \cdot f)(x) &= (\alpha\beta)(f(x)) && \text{(Definition von } \cdot\text{)} \\
&= \alpha(\beta f(x)) && \text{(denn } \alpha,\ \beta \text{ und } f(x) \text{ sind reelle Zahlen)} \\
&= \alpha((\beta \cdot f)(x)) && \text{(Definition von } \cdot\text{)} \\
&= (\alpha \cdot (\beta \cdot f))(x) && \text{(Definition von } \cdot\text{).}
\end{aligned}$$

Das gilt für alle $x \in [0,1]$. Es folgt somit $(\alpha\beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f)$.

Aus

$$\begin{aligned}
(1 \cdot f)(x) &= 1 \cdot (f(x)) && \text{(Definition von } \cdot\text{)} \\
&= f(x) && \text{(denn 1 und } f(x) \text{ sind reelle Zahlen)}
\end{aligned}$$

für alle $x \in [0,1]$, folgt $1 \cdot f = f$ (man beachte, dass „·“ auf der rechten Seite der ersten Gleichung die Multiplikation in $\mathbb{R}$ bezeichnet).

(H13) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Seien U_1 und U_2 Untervektorräume von diesem.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $U_1 \cap U_2 := \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, v \in U_1 \wedge v \in U_2\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist. (3 Punkte)

(La) Ja, das ist immer der Fall. Wir benutzen Satz 2.15;

- $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, denn $\mathbf{0} \in U_1 \cap U_2$.
- Für alle $x, y \in U_1 \cap U_2$ gilt insbesondere $x, y \in U_1$ und daher $x + y \in U_1$, weil U_1 ein Untervektorraum ist. Analog folgt, dass auch $x + y \in U_2$ gilt. Aus $x + y \in U_1$ und $x + y \in U_2$ folgt nun $x + y \in U_1 \cap U_2$.
- Für alle $x \in U_1 \cap U_2$ gilt insbesondere $x \in U_1$ und weiter $\alpha \cdot x \in U_1$. Ebenso gilt $\alpha \cdot x \in U_2$. In beiden Fällen, weil U_1 und U_2 Untervektorräume sind. Hieraus folgt $\alpha \cdot x \in U_1 \cap U_2$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $U_1 \cup U_2 := \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, v \in U_1 \vee v \in U_2\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist. (2 Punkte)

(Lb) Nein, das ist nicht immer der Fall. Nehmen Sie z.B. $U_1 = \{(x,0) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ und $U_2 = \{(0,x) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Dann ist $(1,0) \in U_1 \cup U_2$ und $(0,1) \in U_1 \cup U_2$, aber $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin U_1 \cup U_2$.

(c) Zeigen oder wiederlegen Sie, dass $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \,:\, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist. (3 Bonuspunkte)

(Lc) Ja, das ist immer der Fall. Wir benutzen erneut Satz 2.15;

- $U_1 + U_2 \neq \emptyset$, denn $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in U_1 + U_2$.
- Für alle $x, x' \in U_1 + U_2$ gilt $x = u_1 + u_2$ und $x' = u_1' + u_2'$ mit $u_1, u_1' \in U_1$ und $u_2, u_2' \in U_2$. Somit gilt $x + x' = (u_1 + u_1') + (u_2 + u_2')$. Aus $u_1 + u_1' \in U_1$ und $u_2 + u_2' \in U_2$ folgt nun, dass $x + x' \in U_1 + U_2$.
- Jedes $x \in U_1 + U_2$ kann man schreiben als $x = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Wir erhalten $\alpha \cdot x = \alpha \cdot (u_1 + u_2) = \alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2$. Aus $\alpha \cdot u_1 \in U_1$ und $\alpha \cdot u_2 \in U_2$ folgt nun $\alpha x \in U_1 + U_2$.

(5 Punkte)

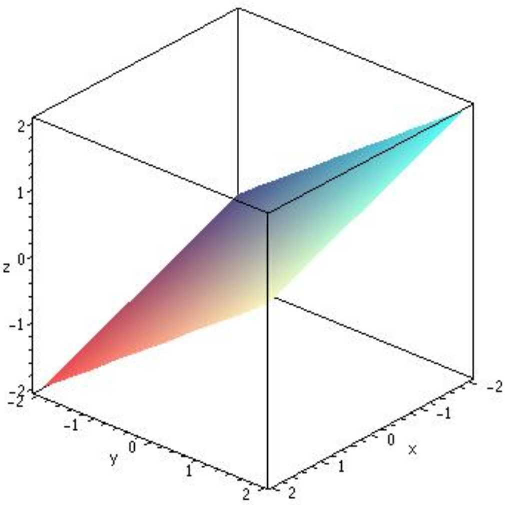
(H14) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $u = (1, 2, 1)$ und $v = (-1, 1, 1)$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$U := \{\alpha \cdot u + \beta \cdot v \,:\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

(2 Punkte)

(La)



(b) Zeigen oder wiederlegen Sie, dass $(-5, -1, 1) \in U$. (1 Punkt)

(Lb) ja, das ist der Fall. Die Gleichung $\alpha \cdot (1, 2, 1) + \beta \cdot (-1, 1, 1) = (-5, -1, 1)$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= -5 \\ 2\alpha + \beta &= -1 \\ \alpha + \beta &= 1\,. \end{aligned}$$

Von der ersten Gleichung erhalten wir $\alpha = \beta - 5$. Einsetzen in der zweiten Gleichung liefert $3\beta - 10 = -1$, also $\beta = 3$ und $\alpha = -2$. Man kontrolliert, dass dies eine Lösung ist von allen Gleichungen, nicht nur von den ersten zwei:

$$-2 \cdot (1,2,1) + 3 \cdot (-1,1,1) = (-5,-1,1)\,.$$

(c) Zeigen oder wiederlegen Sie, dass $(0,3,3) \in U$. (1 Punkt)

(Lc) Nein, das ist nicht der fall. Analog zu (b) erhalten wir ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \alpha - \beta &=& 0 \\ 2\alpha + \beta &=& 3 \\ \alpha + \beta &=& 3\,. \end{array}$$

Aus der erste Gleichung folgt $\alpha = \beta$, und aus der zweite $3\alpha = 3$, also $\alpha = \beta = 1$. Da das nicht konsistent ist mit $\alpha + \beta = 3$, hat obenstehendes System keine Lösungen.

(4 Punkte)

(H15) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $u = (2,1,0)$ und $v = (0,1,0)$ und $w = (1,0,3)$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Vektoren u, v und w. (1 Punkt)

(La)

(b) Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, sodass

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w = (1,-5,3)$$

(2 Punkte)

(Lb) Wir erhalten ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 2\alpha + \gamma &=& 1 \\ \alpha + \beta &=& -5 \\ 3\gamma &=& 3\,. \end{array}$$

Die dritte Gleichung liefert $\gamma = 1$. Die erste liefert (nach Einsetzen von γ) dann $\alpha = 0$, und die zweite Gleichung liefert (nach Einsetzen von α und γ) schießlich $\beta = -5$. Man kontrolliert, dass das in der Tat eine Lösung ist von allen drei Gleichungen.

(c) Beweisen Sie, dass es für jeden Vektor $b = (b_1, b_2, b_3)$ reelle Zahlen α, β, γ gibt, sodass

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w = b\,.$$

(3 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass die Zahlen α, β, γ aus (c) eindeutig sind. (2 Bonuspunkte)

(Lc&d) Wir wiederholen (Lb) mit (b_1, b_2, b_3) statt $(1, -5, 3)$.

$$\begin{aligned} 2\alpha + \gamma &= b_1 \\ \alpha + \beta &= b_2 \\ 3\gamma &= b_3\,. \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $\gamma = \frac{b_3}{3}$. Aus der ersten folgt dann $\alpha = \frac{b_1 - \frac{b_3}{3}}{2} = \frac{b_1}{2} - \frac{b_3}{6}$. Aus der zweiten Gleichung folgt schießlich $\beta = b_2 - \alpha = b_2 - \frac{b_1}{2} + \frac{b_3}{6}$. Wenn α, β und γ überhaupt Lösungen sind, sind sie daher eindeutig bestimmt. Man sollte aber noch kontrollieren, dass es in der Tat Lösungen sind:

$$\left(\frac{b_1}{2} - \frac{b_3}{6}\right) \cdot (2,1,0) + \left(b_2 - \frac{b_1}{2} + \frac{b_3}{6}\right) \cdot (0,1,0) + \left(\frac{b_3}{3}\right) \cdot (1,0,3) = (b_1, b_2, b_3)\,.$$

(6 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 9. Mai 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.