Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 4 SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P7) In Beispiel 2.6. hatten wir auf der Menge $V := \mathbb{R}^{[0,1]}$ (der $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$) eine Addition und eine Skalarmultiplikation eingeführt. Für $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ wurde hierbei $f+g$ und $\alpha \cdot f$ durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x) \quad \text{für alle } x \in [0,1]$$

definiert.
Zeigen Sie, dass das Vektorraumaxiom V2b erfüllt ist, also dass $(\alpha+\beta)\cdot f = \alpha\cdot f+\beta\cdot f$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $f \in V$ gilt.

(P8) Wir untersuchen im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die folgenden Teilmengen

$$T_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y \in \mathbb{Z}\} \qquad T_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = x\}$$
$$T_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 1\} \qquad T_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y \geq 0\}$$
$$T_5 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$$

Fertigen Sie für jede dieser Teilmengen T_i eine Skizze an und entscheiden Sie, ob es sich bei $(T_i, +, \cdot)$ um einen $\mathbb{R}$-Vektorraum handelt („+“ und „·“ sind hierbei die Verknüpfungen auf $\mathbb{R}^2$).

Hausaufgaben

(H12) Vervollständigen Sie das Beispiel 2.6. und zeigen Sie, dass auch die Verktorraumaxiome V2c und V2d erfüllt sind, also dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $f \in V$

$$(\alpha\beta)\cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f) \quad \text{und} \quad 1 \cdot f = f$$

gilt. **(5 Punkte)**

(H13) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Seien U_1 und U_2 Untervektorräume von diesem.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $U_1 \cap U_2 := \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, v \in U_1 \wedge v \in U_2\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist. (3 Punkte)

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $U_1 \cup U_2 := \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, v \in U_1 \vee v \in U_2\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist. (2 Punkte)

(c) Zeigen oder wiederlegen Sie, dass $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \,:\, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist. (3 Bonuspunkte)

(5 Punkte)

(H14) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $u = (1, 2, 1)$ und $v = (-1, 1, 1)$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$U := \{\alpha \cdot u + \beta \cdot v \,:\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

(2 Punkte)

(b) Zeigen oder wiederlegen Sie, dass $(-5, -1, 1) \in U$. (1 Punkt)

(c) Zeigen oder wiederlegen Sie, dass $(0, 3, 3) \in U$. (1 Punkt)

(4 Punkte)

(H15) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $u = (2, 1, 0)$ und $v = (0, 1, 0)$ und $w = (1, 0, 3)$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Vektoren u, v und w. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, sodass

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w = (1, -5, 3)$$

(2 Punkte)

(c) Beweisen Sie, dass es für jeden Vektor $b = (b_1, b_2, b_3)$ reelle Zahlen α, β, γ gibt, sodass

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w = b\,.$$

(3 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass die Zahlen α, β, γ aus (c) eindeutig sind. (2 Bonuspunkte)

(6 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 9. Mai 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.