Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 3 SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P5) Wir berechnen die unterschiedlichen Darstellungen komplexer Zahlen.

(a) Sei $z = \sqrt{3} + i$. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von z.

(b) Die komplexe Zahl z sei durch die Polarkoordinaten $(\sqrt{3}, \frac{\pi 4}{5})$ gegeben. Berechnen Sie von z die Darstellung der Form $z = a + bi$.

(c) Die komplexe Zahl z sei durch die Polarkoordinaten $(\sqrt{8}, \frac{\pi 5}{4})$ gegeben. Berechnen Sie von z die Darstellung der Form $z = a + bi$.

(P6) Es sei die Menge

$$E_n = \{e^{i\frac{k}{n}2\pi} \,:\, k \in \{0, \dots, n-1\}\}$$

der n-ten **Einheitswurzeln** gegeben.

(a) Ziegen Sie, dass $(E_n, \cdot)$ eine (Unter-) Gruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

(b) Geben Sie alle Lösungen, der Gleichung

$$(z-3)^5 = 1$$

an.

Hausaufgaben

(H8) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{R}^n$ der n-dimensionale reelle Standardraum. Weiter sei

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

die in der Vorlesung eingeführte Addition und

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (k, x) &\mapsto k \cdot x := (kx_1, \dots, kx_n) \end{aligned} \tag{2}$$

die Skalarmultiplikation.

(a) Führen Sie den Beweis zu Satz 2.2. und zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, +)$ eine abelsche Gruppe ist. (4 Punkte)

(b) Führen Sie den Beweis zu Bemerkung 2.5.1. und zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. (4 Punkte)

(8 Punkte)

(H9) Es sei die Menge

$$V := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist; die Verknüpfungen sind hierbei erneut durch (1) und (2) gegeben. (6 Punkte)

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(V', +, \cdot)$ ein Vektorraum ist; hierbei sei

$$V' := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und die Verknüpfungen wie bei $(V, +, \cdot)$ definiert. (2 Punkte)

(c) Skizzieren Sie die Menge V. (2 Punkte)

(10 Punkte)

(H10) Seien α und β die Lösungen der Gleichungen $z^2 + z + 1 = 0$ und $z^2 - z + 1 = 0$ mit $\operatorname{Im} \alpha > 0$ und $\operatorname{Im} \beta > 0$.

(a) Berechnen Sie α und β. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Potenzen $\beta, \beta^2, \ldots, \beta^6$. (1 Punkt)

(c) Skizzieren Sie die Potenzen aus (b) in der Gaußschen Zahlenebene. (1 Punkt)

(d) Beschreiben Sie die Potenzen aus (b) in Polarkoordinaten. (2 Punkte)

(e) Zeigen Sie, dass die Potenzen aus (b) eine Gruppe S bilden und bestimmen Sie die Anzahl der Elemente dieser Gruppe. (2 Bonuspunkte)

(6 Punkte)

(H11) Beschreiben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -3i$ (oder der Gleichung $z^3 = 3i$) in der Form $a + bi$ und skizzieren Sie diese. **(6 Punkte)**

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 2. Mai 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.