Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 3 SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P5) Wir berechnen die unterschiedlichen Darstellungen komplexer Zahlen.

(a) Sei $z = \sqrt{3} + i$. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von z.

(La) Der Betrag ist $r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$. Es gilt daher $\sin(\phi) = \mathrm{Im}(z)/|z| = 1/2$ und $\cos(\phi) = \mathrm{Re}(z)/|z| = 1/2\sqrt{3}$. Obiges bestimmt eindeutig das Argument $\phi = \pi/6$.

(b) Die komplexe Zahl z sei durch die Polarkoordinaten $(\sqrt{3}, \frac{\pi 5}{6})$ gegeben. Berechnen Sie von z die Darstellung der Form $z = a + bi$.

(Lb) $z = \sqrt{3}(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)) = \sqrt{3}(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$.

(c) Die komplexe Zahl z sei durch die Polarkoordinaten $(\sqrt{8}, \frac{\pi 5}{4})$ gegeben. Berechnen Sie von z die Darstellung der Form $z = a + bi$.

(Lc) $z = \sqrt{8}(\cos(\frac{\pi 5}{4}) + i\sin(\frac{\pi 5}{4})) = \sqrt{8}(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{16} - i\frac{1}{2}\sqrt{16} = -2 - 2i$.

Bemerkung: Eine Skizze ist immer hilfreich!

(P6) Es sei die Menge

$$E_n = \{e^{i\frac{k}{n}2\pi} \,:\, k \in \{0, \dots, n-1\}\}$$

der n-ten **Einheitswurzeln** gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $(E_n, \cdot)$ eine (Unter-) Gruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

(La) Wir zeigen, dass E_n eine Untergruppe von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, dass heißt, dass E_n abgegeschlossen ist bzgl. komplexer Multiplikation, und dass jedes Element von E_n ein Inverses hat in E_n.

Zuerst bemerken wir, dass man jedes $k \in \mathbb{Z}$ ausdrücken kann als $k = qn + r$ mit $r \in \{0, \dots, n-1\}$. Es folgt dann mit Satz 1.27, dass $e^{i\frac{k}{n}2\pi} = e^{iq2\pi}e^{i\frac{r}{n}2\pi} = e^{i\frac{r}{n}2\pi}$ (hier geht insbesondere $e^{iq2\pi} = 1$ ein). Dies zeigt, dass

$$E_n = \{e^{i\frac{k}{n}2\pi} \,:\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Wenn $z \in E$ und $w \in E$, so gibt es $k, k' \in \mathbb{Z}$ mit $z = e^{i\frac{k}{n}2\pi}$ und $w = e^{i\frac{k'}{n}2\pi}$. Es folgt dann ebenfalls mit Satz 1.27, dass $w \cdot z = e^{i\frac{k}{n}2\pi}e^{i\frac{k'}{n}2\pi} = e^{i\frac{k+k'}{n}2\pi}$. Wegen $k + k' \in \mathbb{Z}$ ist nun $e^{i\frac{k+k'}{n}2\pi} \in E_n$.

Jedes Element $z = e^{i\frac{k}{n}2\pi}$ hat ein Inverses $z^{-1} = e^{i\frac{-k}{n}2\pi}$ in E_n, da $e^{i\frac{-k}{n}2\pi}e^{i\frac{k}{n}2\pi} = e^{i\frac{k}{n}2\pi}e^{i\frac{-k}{n}2\pi} = e^0 = 1$.

Insgesamt haben wir gezeigt:

$$z, w \in E_n \Rightarrow (z \cdot w \in E_n) \wedge (z^{-1} \in E_n)\,.$$

Somit ist E_n eine Untergruppe von $\mathbb{C}$, und insbesondere eine Gruppe.

(b) Geben Sie alle Lösungen, der Gleichung

$$(z-3)^5 = 1$$

an.

(Lb) Wie bekannt sind die Lösungen von $w^5 = 1$ genau $w_k = e^{ik\cdot\frac{2\pi}{5}}$ mit $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Ergänzen wir $w = z - 3$ in obigem Ausdrück, so erhalten wir $z_k = 3 + e^{ik\cdot\frac{2\pi}{5}}$.

Hausaufgaben

(H8) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{R}^n$ der n-dimensionale reelle Standardraum. Weiter sei

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

die in der Vorlesung eingeführte Addition und

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (k, x) &\mapsto k \cdot x := (kx_1, \ldots, kx_n) \end{aligned} \tag{2}$$

die Skalarmultiplikation.

(a) Führen Sie den Beweis zu Satz 2.2. und zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, +)$ eine abelsche Gruppe ist. (4 Punkte)

(La) Das neutrale Element ist der Vektor $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, denn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} x + \mathbf{0} &= (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) \\ &= (x_1, \ldots, x_n) \\ &= x\,. \end{aligned}$$

Die Addition "+" ist eine assoziative Verknüpfung, denn für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= ((x_1 + y_1), \ldots, (x_n + y_n)) + (z_1, \ldots, z_n) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= x + (y + z)\,, \end{aligned}$$

und jedes Element $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ hat ein Inverses $-x := (-x_1, \ldots, -x_n)$, da

$$\begin{aligned} x + (-x) &= (x_1 + (-x_1), \ldots, x_n + (-x_n)) \\ &= (0, \ldots, 0) \\ &= \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir jetzt gezeigt, dass $(\mathbb{R}^n, +)$ eine Gruppe ist.
Sie ist auch abelsch, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \\ &= y + x\,. \end{aligned}$$

(b) Führen Sie den Beweis zu Bemerkung 2.5.1. und zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. (4 Punkte)

(Lb) In H8a haben wir schon gezeigt, dass $(\mathbb{R}^n, +)$ eine abelsche Gruppe ist, also (V1) im Skript ist bewiesen. Bleibt
(V2)a: Für alle $k, k' \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} (k+k')\cdot x &= ((k+k')x_1, \dots, (k+k')x_n) \\ &= (kx_1 + k'x_1, \dots, kx_n + k'x_n) \\ &= k\cdot x + k'\cdot x\,. \end{aligned}$$

(V2)b: Für alle $k \in \mathbb{R}$ und $x, x' \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} k\cdot(x+y) &= k\cdot(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) \\ &= (k(y_1+x_1), \dots, k(y_n+x_n)) \\ &= (ky_1+kx_1), \dots, ky_n+kx_n)) \\ &= k\cdot x + k\cdot y\,. \end{aligned}$$

(V2)c: Für alle $k, k' \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} (kk')\cdot x &= (kk'x_1, \dots, kk'x_n) \\ &= k\cdot(k'x_1, \dots, k'x_n) \\ &= k\cdot(k'\cdot x)\,. \end{aligned}$$

Und schliesslich (V2)d: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} 1\cdot x &= (1\cdot x_1, \dots, 1\cdot x_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n) \\ &= x\,. \end{aligned}$$

(8 Punkte)

(H9) Es sei die Menge

$$V := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist; die Verknüpfungen sind hierbei erneut durch (1) und (2) gegeben.

(La) (V1)
Wir zeigen, dass $(V, +)$ eine abelsche Untergruppe ist von $(\mathbb{R}^3, +)$.
Sind $x, y \in V$, so gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Wegen $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0$ gilt nun auch $x + y \in V$.
Es sei $x \in V$. Dann gilt, wegen $x_1+x_2+x_3 = 0$, auch $(-x_1)+(-x_2)+(-x_3) = 0$. Somit ist $-x \in V$.

Wir haben gezeigt, dass $x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$ und dass $x \in V \Rightarrow -x \in V$, dass heißt, $(V, +)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^3, +)$. In H8 haben wir schon bewiesen, dass $(\mathbb{R}^3, +)$ eine abelsche Gruppe ist, also $x + y = y + x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt dann $x + y = y + x$ für alle $x, y \in V$, und $(V, +)$ ist auch eine abelsche Gruppe.

(V2)

Es seien $k \in \mathbb{R}$ und $x \in V$. Dann gilt wegen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ auch

$$0 = k \cdot 0 = k \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = kx_1 + kx_2 + kx_3$$

also $k \cdot x \in V$. Dies zeigt, dass die Skalarmultiplikation eine Verknüpfung $\cdot\ : \mathbb{R} \times V \to V$ ist.

In H8 haben wir schon gezeigt, dass die Vektorraum-Axiomen (V2) a,b,c und d erfüllt sind für alle $k \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere sind sie erfüllt für alle $k \in \mathbb{R}$, $x \in V$. Somit ist $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. (6 Punkte)

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(V', +, \cdot)$ ein Vektorraum ist; hierbei sei

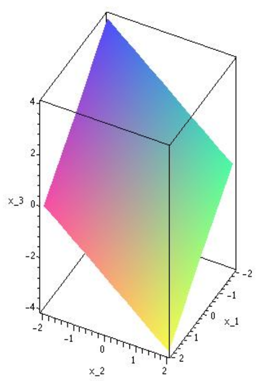
$$V' := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und die Verknüpfungen wie bei $(V, +, \cdot)$ definiert.

(Lb) $(V', +, \cdot)$ ist kein Vektorraum. Das Problem ist, dass V' weder bzgl. Addition noch Multiplikation abgeschlossen ist. Zum Beispiel, $(1, 0, 0) \in V'$ und $(0, 1, 0) \in V'$, aber $(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin V'$.

(2 Punkte)

(c) Skizzieren Sie die Menge V.



(Lc)

(2 Punkte)

(10 Punkte)

(H10) Seien α und β in $\mathbb{C}$ die Lösungen der Gleichungen $z^2 + z + 1 = 0$ und $z^2 - z + 1 = 0$ mit $\operatorname{Im} \alpha > 0$ und $\operatorname{Im} \beta > 0$.

(a) Berechnen Sie α und β.

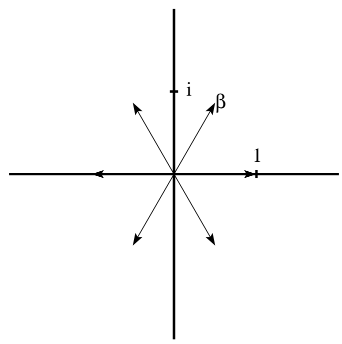
(La) Wegen Bemerkung 1.9 sind die Lösungen von $z^2+z+1=0$ genau $z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, also $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Die Lösungen von $z^2 - z + 1$ sind $z_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, also $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Potenzen $\beta, \beta^2, \dots, \beta^6$.

(Lb) $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. $\beta^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. $\beta^3 = \beta \cdot \beta^2 = -1$. $\beta^4 = -\beta = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. $\beta^5 = -\beta^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. $\beta^6 = -\beta^3 = 1$. (1 Punkt)

(c) Skizzieren Sie die Potenzen aus (b) in der Gaußschen Zahlenebene.

(Lc)



(1 Punkt)

(d) Beschreiben Sie die Potenzen aus (b) in Polarkoordinaten.

(Ld) Der Betrag von β ist $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$. Das Argument erfüllt $\sin(\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos(\phi) = \frac{1}{2}$, also $\phi = \pi/3$. Es gilt nun $|\beta^n| = |\beta|^n = 1$, und β^n hat das Argument $\phi = n \cdot \pi/3$.

(2 Punkte)

(e) Zeigen Sie, dass die Potenzen aus (b) eine Gruppe S bilden und bestimmen Sie die Anzahl der Elemente dieser Gruppe.

(Le) Jedes $n \in \mathbb{Z}$ kann man schreiben als $n = 6q + r$ mit $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und $q \in \mathbb{Z}$. Wegen $\beta^6 = 1$ ist nun $\beta^n = (\beta^6)^q \cdot \beta^r = \beta^r$, also $\{\beta^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{1, \beta, \dots \beta^5\} = E_6$. Wegen (P6) ist das eine Gruppe, und da $1, \beta, \dots \beta^5$ alle verschieden sind, hat E_6 genau 6 Elemente. (2 Bonuspunkte)

(6 Punkte)

(H11) Beschreiben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -3i$ (oder der Gleichung $z^3 = 3i$) in der Form $a + bi$ und skizzieren Sie diese.

LH11 Wir suchen alle Lösungen $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$ mit $z_k^3 = -3i$. Die Zahl $-3i$ können wir in Polarkoordinatendarstellung schreiben als $3e^{i\frac{3\pi}{2}}$, der Betrag von $-3i$ ist also $r = 3$ und der Winkel ist $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Laut Vorlesung ist nun $r_k = \sqrt[3]{3}$ und eine Lösung der

Gleichung durch $z_0 = \sqrt[3]{3}e^{i(\frac{1}{3}\cdot\frac{3\pi}{2})} = \sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ gegeben. Alle Lösungen der Gleichung sind Ecken eines regelmäßigen n-Ecks, eingezeichnet in den Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt[3]{3}$ und einer Ecke in $\sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$. Die Formel für die „anderen" Ecken z_1 und z_2 ist nun gegeben durch

$$z_k = z_0 e^{i\frac{k}{3}2\pi} = \sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{k}{3}2\pi} = \sqrt[3]{3}e^{i(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{3}e^{i\pi(\frac{3+k4}{6})}$$

für $k \in \{1, 2\}$. Insgesamt erhalten wir

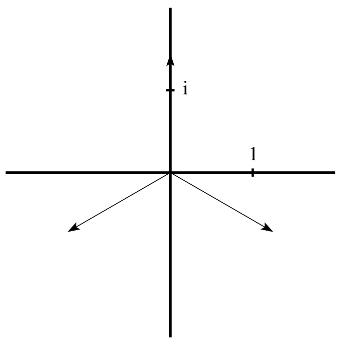
$$z_0 = \sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{3}i$$

und die weiteren Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 = \sqrt[3]{3}e^{i\pi\left(\frac{7}{6}\right)} &= \sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)\right) \\ &= \sqrt[3]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}3^{\frac{5}{6}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{3}i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} z_2 = \sqrt[3]{3}e^{i\pi\left(\frac{11}{6}\right)} &= \sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) + i\sin\left(\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)\right) \\ &= \sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}3^{\frac{5}{6}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{3}i \end{aligned}$$



Die Berechnungen für den Fall $z^3 = 3i$ gehen analog zu dem Beispiel 1.31. (es muss hierbei nur der Betrag von $\sqrt[3]{2}$ in $\sqrt[3]{3}$ geändert werden.

(6 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 2. Mai 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.