Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 2 — SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P3) Ermitteln Sie Real-, Imaginärteil und Betrag von

$$\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}\,, \qquad \frac{2i}{1-i} \text{ und } \left(\frac{2i}{1-i}\right)^3.$$

(LP3) Wir multiplizieren beide Seiten des ersten Ausdrucks mit der Konjugierten des Nenners:

$$\frac{5+5i}{3-4i}=\frac{(5+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{15+20i+15i-20}{9+16}=\frac{-5+35i}{25}$$

und

$$\frac{20}{4+3i}=\frac{20(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{80-60i}{25}\,.$$

Wir addieren beide Seiten und erhalten

$$\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}=\frac{-5+35i}{25}+\frac{80-60i}{25}=\frac{75-25i}{25}=3-i\,.$$

Somit ist der Realteil 3, der Imaginärteil -1, und der Betrag $\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.

Für die zweite Zahl multiplizieren wir Zähler und Nenner mit der Konjugierten des Nenners, $1+i$. Dies liefert

$$\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i-2}{2}=-1+i\,,$$

also der Realteil ist -1, der Imaginärteil ist 1, und der Betrag ist $\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Da $|z|^3=|z^3|$ gilt, ist der Betrag der dritten Zahl einfach $\sqrt{2}^3=2\sqrt{2}$. Für den Real- und Imaginärteil bestimmen wir $(-1+i)^3=(-1+i)(-2i)=2+2i$, also der Realteil ist 2, der Imaginärteil ist 2.

(P4) Bestimmen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichungen

$$z^2+z+1=0 \text{ und } z^2+4z=-5.$$

(LP4) Die Lösungen für $x^2+px+q=0$ sind $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ falls $\frac{1}{4}p^2-q\geq 0$, und $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}$ falls $\frac{1}{4}p^2-q\leq 0$. Somit haben wir für $z^2+z+1=0$, wegen $\frac{1}{4}-1<0$, die beiden Lösungen $z_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm i\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$, und für $z^2+4z+5=0$, wegen $\frac{16}{4}-5<0$, die Lösungen $z_{1/2}=-2\pm i\sqrt{5-4}=-2\pm i$.

Hausaufgaben

(H4) Ermitteln Sie Real-, Imaginärteil und Betrag von

$$\frac{1+i}{1-(1+i)^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}+2i}-\frac{1}{3i}}\,.$$

(LH4) Da $(1+i)^2 = 2i$ gilt, ist der erste Ausdruck gleich $\frac{1+i}{1-2i}$. Multiplizieren wir Zähler und Nenner mit der Kunjugierten des Nenners, so erhalten wir

$$\frac{1+i}{1-(1+i)^2} = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-1+3i}{5}\,.$$

Daraus folgt, dass der Realteil gleich $-\frac{1}{5}$ ist, der Imaginärteil gleich $\frac{3}{5}$, und der Betrag gleich $\sqrt{(-\frac{1}{5})^2+(\frac{3}{5})^2} = \frac{1}{5}\sqrt{10} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\,.$

Für die Zweite Zahl bringen wir beide Bestandteile des Nenners auf einen gemeinsamen Nenner;

$$\frac{1}{\sqrt{2}+2i} - \frac{1}{3i} = \frac{3i-(\sqrt{2}+2i)}{3i(\sqrt{2}+2i)} = \frac{-\sqrt{2}+i}{-6+3\sqrt{2}i}\,.$$

Somit ist

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}+2i}-\frac{1}{3i}} = \frac{-6+3\sqrt{2}i}{-\sqrt{2}+i}\,.$$

Wenn wir mit der Konjugierten des Nenners multiplizieren, erhalten wir

$$\frac{(-6+3\sqrt{2}i)(-\sqrt{2}-i)}{(-\sqrt{2}+i)(-\sqrt{2}-i)} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}\,.$$

Wir schlussfolgern, dass der Realteil $3\sqrt{2}$ ist, der Imaginärteil 0, und der Betrag $3\sqrt{2}$.

(6 Punkte)

(H5) Beweisen Sie Bemerkung 1.13.2 aus der Vorlesung: Ist $X^2 + pX + q \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit nicht-reeller Nullstelle α, dann ist $\bar{\alpha}$ eine weitere Nullstelle. *Tipp:* Sie dürfen Satz 1.12 aus der Vorlesung benutzen.

(LH5) Es sei α eine Lösung. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
& 0 = \alpha^2 + p\alpha + q \\
\Rightarrow\quad & \overline{0} = \overline{\alpha^2 + p\alpha + q} \\
\overset{\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}}{\Rightarrow}\quad & \overline{0} = \overline{\alpha^2} + \overline{p\alpha} + \overline{q} \\
\overset{\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}}{\Rightarrow}\quad & \overline{0} = \overline{\alpha}^2 + \overline{p}\,\overline{\alpha} + \overline{q} \\
\overset{0,p,q\in\mathbb{R}}{\Rightarrow}\quad & 0 = \overline{\alpha}^2 + p\overline{\alpha} + q\,,
\end{aligned}$$

also ist $\overline{\alpha}$ eine andere Lösung der selben Gleichung.

(4 Punkte)

(H6) Sei $E \subseteq \mathbb{C}$ die Teilmenge

$$E := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass $(E, \cdot)$ eine Gruppe ist („$\cdot$“ bezeichne hierbei die Multiplikation auf den komplexen Zahlen). *Tipp:* Um die Aussage zu zeigen, können Sie auch zeigen, dass $(E, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

Wir zeigen, dass E eine Untergruppe von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, dass heißt, dass E abgegeschlossen ist unter komplexer Multiplikation, und dass jedes Element von E eine Inverses hat in E.

Wenn $z \in E$ und $w \in E$, so gilt $|z| = |w| = 1$. Mit Satz 1.12 folgt dann $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 1 \cdot 1 = 1$. Somit gilt $z \cdot w \in E$.

Wegen $|z| = 1$ wissen wir, dass $z \neq 0$ für alle $z \in E$. Somit hat jedes Element der Menge E eine Inverse $\frac{1}{z}$ in $\mathbb{C}$. Wegen Satz 1.14 (3) gilt nun $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = 1$. Dies zeigt, dass das Inverse $\frac{1}{z}$ auch zu E gehört.

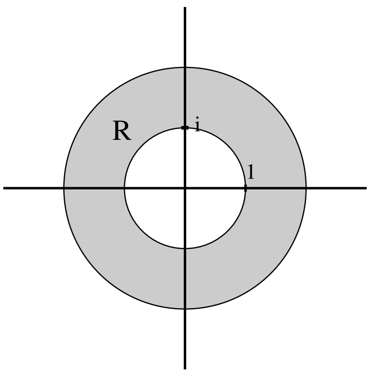
Wegen $z, w \in E \Rightarrow (z \cdot w \in E) \wedge (z^{-1} \in E)$ ist E eine Untergruppe von $\mathbb{C}$, und insbesondere eine Gruppe.

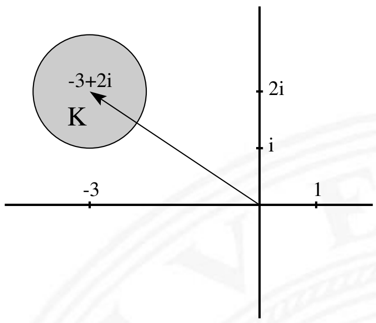
Natürlich kann man auch direkt die Gruppenaxiome nachweisen. Man zeigt dann noch extra, dass $1 \in E$ das neutrale Element ist, und dass die Multiplikation assoziativ ist.

(6 Punkte)

(H7) Skizzieren Sie folgende Mengen in der Gaußschen Zahlenebene

$$R := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\} \quad \text{und} \quad K := \{z \in \mathbb{C} : |z + 3 - 2i| \leq 1\}.$$





(4 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 18. April 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.