Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 1 SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P1) Mach Sie sich bei den folgenden Gleichungssystemen die Lösung mit einer Skizze deutlich. Lösen Sie dann die Systeme mit den (hoffentlich) aus der Schule bekannten Verfahren.

(a) Lösen Sie das Gleichungssystem

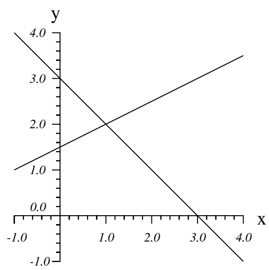
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}$$

mit dem Gleichsetzungsverfahren.

(La) Wir formen die Gleichungen nach y um,

$$\begin{aligned} y &= 3 - x \\ y &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Wir setzen die beiden Seiten gleich, $3 - x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Dies liefert uns nun $x = 1$, und damit $y = 3 - 1 = 2$. Skizze:

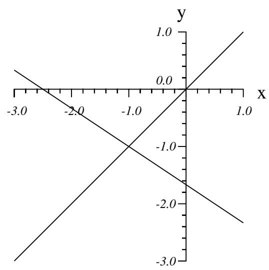


(b) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= -5 \\ -x + y &= 0 \end{aligned}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

(Lb) Aus der zweiten Gleichung folgt $y = x$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $5x = -5$, also $x = -1$. Daher haben wir auch $y = x = -1$. Skizze:



(c) Lösen Sie das Gleichungssystem

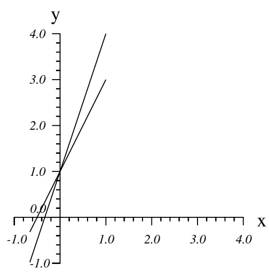
$$\begin{aligned} 4x - 2y &= -2 \\ -3x + y &= 1 \end{aligned}$$

mit dem Additionsverfahren.

(Lc) Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit 2, dann erhalten wir das System

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= -2 \\ -6x + 2y &= 2. \end{aligned}$$

Addieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir $-2x = 0$, also $x = 0$. Dann liefert z.B. die zweite Gleichung $2y = 2$, und somit $y = 1$. Skizze:



(P2) Es sei eine Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

mit $(a, b), (c, d) \neq (0, 0)$ gegeben. Außerdem gelte $ad - bc = 0$, $as - cr = 0$ und $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass das Paar (x, y) genau dann eine reelle Lösung des Gleichungssystems ist, wenn es von der Form $(\frac{r-b\beta}{a}, \beta)$ mit einem $\beta \in \mathbb{R}$ ist.

(LP2) Es gibt hier viele korrekte Lösungen, Folgende ist nur eine davon. Wir zeigen, dass jede Lösung von $ax+by = r$ auch eine Lösung von $cx+dy = s$ ist und umgekehrt. Die Lösungen von obenstehendem System sind dann genau die Lösungen von $ax+by = r$, und die sind nicht schwer zu finden: umformen nach $x = (r - by)/a$ zeigt, dass einer beliebigen Wahl $\beta \in \mathbb{R}$ genau einer Lösung $(x, y) = (\frac{r-b\beta}{a}, \beta)$ entspricht und umgekehrt.

Aus $a \neq 0$ folgt $c \neq 0$, denn angenommen $c = 0$, so wäre wegen $ad = bc$ auch $d = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $(c, d) \neq (0, 0)$. Es gilt nun folgendes:

$$\begin{aligned}
& cx + dy = s \\
\overset{(a\neq 0)}{\iff} \quad & acx + ady = as \\
\overset{(ad=bc)}{\iff} \quad & acx + bcy = as \\
\overset{(as=cr)}{\iff} \quad & acx + bcy = cr \\
\iff \quad & c(ax + by) = cr \\
\overset{(c\neq 0)}{\iff} \quad & ax + by = r.
\end{aligned}$$

Somit ist jede Lösung von $ax + by = r$ auch eine Lösung von $cx + dy = s$ und umgekehrt.

Hausaufgaben

(H1) Es sei eine Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

mit $(a, b), (c, d) \neq (0, 0)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$ad - bc = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a = \lambda c \text{ und } b = \lambda d\,.$$

(4 Punkte)

(La) $'' \Leftarrow''$ Das ist nicht schwer: $ad - bc = \lambda cd - \lambda dc = 0$.
$'' \Rightarrow''$ Da $(c, d) \neq (0, 0)$ haben wir $c \neq 0$ oder $d \neq 0$. Erst nehmen wir an $c \neq 0$. Da $c \neq 0$ haben wir $a = \lambda c$ mit $\lambda := \frac{a}{c}$. Wir zeigen, dass mit diesem λ auch $b = \lambda d$ gilt. Hierzu ergänzen wir $a = \lambda c$ in $ad = bc$ und erhalten so $\lambda cd = bc$. Wir benutzen erneut $c \neq 0$, und schlussfolgern, dass $b = \lambda d$.

Im Fall $c = 0$ muß $d \neq 0$ sein. Analog zu obiger Rechnung gilt hier $b = \lambda d$ mit $\lambda := \frac{b}{d}$. Aus $b = \lambda d$ und $ad = bc$ folgt $ad = \lambda dc$, also $a = \lambda c$. Es ist klar dass $\lambda \neq 0$, ansonsten wäre $(a, b) = (0, 0)$.

(b) Sei wieder $ad - bc = 0$ und λ die reelle Zahl, die Sie nach (a) erhalten. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem lösbar ist, wenn $r = \lambda s$ gilt. (2 Punkte)

(Lb) Wenn $r = \lambda s$, kann man $ax + by = r$ schreiben als $\lambda(cx + dy) = \lambda s$. Die Gleichungen $ax + by = r$ und $cx + dy = s$ haben wegen $\lambda \neq 0$ die gleiche Lösungsmenge. Es bleibt nur zu beweisen, dass $ax + by = r$ lösbar ist. Das ist aber nicht schwierig: wenn $b \neq 0$ erhält man $y = \frac{r - ax}{b}$, also für jede $\beta \in \mathbb{R}$ ist $(\beta, \frac{r - a\beta}{b})$ eine Lösung. Wenn $b = 0$ muß $a \neq 0$ sein, und man erhält die Lösungen $(\frac{r - b\beta}{a}, \beta)$ mit $\beta \in \mathbb{R}$.

Übrigens ist das Gleichungssystem lösbar *genau* dann wenn $r = \lambda s$. Wenn das Gleichungssystem überhaupt lösbar ist, gilt für jede Lösung (x, y) dass $\lambda s = \lambda(cx + dy) = ax + by = r$. (Das war jedoch nicht die Frage.)

(6 Punkte)

(H2) Zeigen Sie, dass die im Satz 1.2. angegebene Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ a &\mapsto (a, 0) \end{aligned}$$

ein Körperhomomorphismus ist, d.h. f ist eine injektive Abbildung, für die

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

und

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.

(LH2) f ist verträglich mit der Multiplikation:

$$f(a)f(b) = (a,0)\cdot(b,0) = (a\cdot b - 0\cdot 0, a\cdot 0 + 0\cdot b) = (ab,0) = f(ab)\,.$$

f ist verträglich mit der Addition:

$$f(a)+f(b) = (a,0)+(b,0) = (a+b, 0+0) = (a+b,0) = f(a+b)\,.$$

Offensichtlich ist f (wie jeder Körperhomomorphismus) injektiv; wenn $f(a) = f(b)$, dann folgt $(a,0) = (b,0)$ und somit $a = b$.

(8 Punkte)

(H3) Es seien die komplexen Zahlen $x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ und $y = -1+2i$ gegeben.

(a) Berechnen Sie $x+y$, $x\cdot y$, x^{-1} und y^{-1}.

(La)

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i + -1 + 2i \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\cdot y &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\cdot(-1+2i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-1) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot -1\right) i + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\right) i^2 \\ &= -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

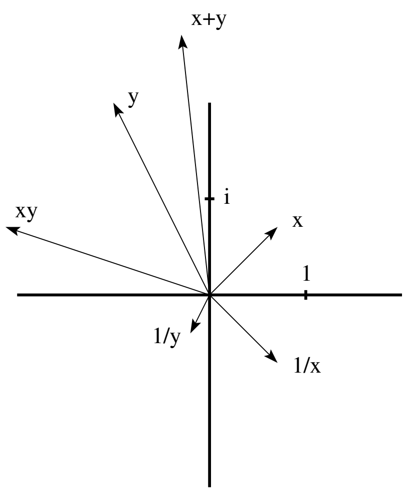
$$\begin{aligned} x^{-1} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{-1} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{-1} &= (-1+2i)^{-1} \\ &= \frac{-1-2i}{(-1+2i)\cdot(-1-2i)} \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

(2 Punkte)

(b) Schreiben Sie die Elemente aus (a) in Tupel-Schreibweise und zeichnen Sie sie in die Standardebene $\mathbb{R}^2$ ein.

Lb $x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $y = (-1, 2)$, $xy = (-\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $x + y = (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + 2)$, $x^{-1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, und $y^{-1} = (-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$. In der Ebene wird das:



(2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $w^2 = -9$.

(Lc) Wir nehmen an, dass es eine Lösung $w = a+bi$ gibt, und versuchen dann a und b zu bestimmen. Wenn es eine Lösung gibt, so muss (in Tupel-Schreibweise) gelten $(a, b) \cdot (a, b) = (a^2 - b^2, 2ab) = (-9, 0)$, also

$$a^2 - b^2 = -9 \tag{1}$$

und

$$2ab = 0\,. \tag{2}$$

Aus (2) folgt $a = 0$ oder $b = 0$. Ist $b = 0$, so folgt für (1) $a^2 = -9$. Dies ist allerdings nicht lösbar (denn a ist reell). Ist $a = 0$, so folgt $-b^2 = -9$ und dies hat die Lösungen $b = 3$ und $b = -3$. Man überprüft leicht, dass $(0, 3)$ und $(0, -3)$ (bzw. $3i$ und $-3i$) die Lösungen von $w^2 = -9$ sind.

(2 Punkte)

(d) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $w^2 = 2i$.

(Ld) Analog zu (Lc) erhalten wir für eine Lösung $w = a + bi$ die Gleichung $(a^2 - b^2, 2ab) = (0, 2)$, also

$$a^2 - b^2 = 0 \tag{3}$$

und

$$2ab = 2\,. \tag{4}$$

Aus (4) folgt $a \neq 0$ und $a = b^{-1}$ bzw. $b = a^{-1}$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
& a^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 0 \\
\overset{a\neq 0}{\iff} \quad & a^4 - 1 = 0 \\
\iff \quad & (a^2+1)(a+1)(a-1) = 0 \\
\implies \quad & a = 1 \quad \text{oder} \quad a = -1\,.
\end{aligned}
$$

Aus $b = \frac{1}{a}$ folgt $b = 1$ (wenn $a = 1$) oder $b = -1$ (wenn $a = -1$). Man überprüft leicht, dass $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ (bzw. $1 + i$ und $-(1 + i)$) die Lösungen von $w^2 = 2i$ sind.

(2 Bonuspunkte)

(6 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 11. April 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.