Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 11 SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P22) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei invertierbar. Zeigen Sie, dass es nur genau eine inverse Matrix zu A gibt (dies rechtfertigt die Notation A^{-1}).

(LP22) Wenn B und B' zwei Inverse von A sind, $AB = BA = I$ und $AB' = B'A = I$, dann gilt $(B - B')A = BA - B'A = I - I = 0$. Aber wegen $AB = I$ gilt nun

$$0 = ((B - B')A)B = (B - B')(AB) = (B - B')I = B - B'\,.$$

(P23) Berechnen Sie A^{-1} zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(LP23) Wir suchen zuerst eine Matrix B mit $AB = I$, und zeigen dann das auch $BA = I$ gilt. Mit

$$B = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

ist $AB = I$ genau die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die Matrixgleichung (1) ist äquivalent zu dem System von 3 Vektorgleichungen (2), (3) und (4), mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Wir lösen (2) mit dem Gauß-algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{9}{7} \end{array}\right)$$

Rückwärtseinsetzen liefert $x_{31} = 9$, $x_{21} = -6$, und $x_{11} = 13$. Auf der gleichen Weise lösen wir (3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right)$$

liefert $x_{32} = 3$, $x_{22} = -2$, und $x_{12} = 4$, und die Gleichung (4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & 1 \end{array}\right)$$

liefert $x_{33} = -7$, $x_{23} = 5$, und $x_{13} = -10$. Die Gleichung $AB = I$ hat daher genau eine Lösung, nämlich

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -10 \\ -6 & -2 & 5 \\ 9 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Wir haben jetzt genau eine Lösung von der Gleichung $AB = I$. Wir müssen jetzt noch kontrollieren, dass auch $BA = I$ gilt, das heißt, dass nicht nur

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 4 & -10 \\ -6 & -2 & 5 \\ 9 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt, aber auch

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & -10 \\ -6 & -2 & 5 \\ 9 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man multipliziert die Matrizen, und sieht dass es stimmt.

Bemerkung: Wenn $AB = I$ gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann gilt *automatisch* auch $BA = I$. Zuerst bemerken wir, dass jede injektive $n \times n$-matrix auch surjektiv ist. Eine Matrix B ist injektiv, genau wenn $\textbf{Kern}\, B = \{0\}$. Aber wegen des Dimensionssatzes gilt dann $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\textbf{Kern}\, B) + \dim(\textbf{Bild}\, B) = \dim(\textbf{Bild}\, B)$, also gilt $\dim(\textbf{Bild}\, B) = n$. Da $\textbf{Bild}\, B$ ein n-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist, muss es der ganze $\mathbb{R}^n$ sein, $\textbf{Bild}\, B = \mathbb{R}^n$, und somit ist B surjektiv.

Aus $AB = I$ folgt, dass B injektiv ist: wenn $Bx = 0$ gilt, dann gilt auch $A(Bx) = 0$, und wegen $AB = I$ auch $x = 0$. Somit ist B nach obiger Überlegung auch surjektiv, mit anderen Worten: für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}^n$, sodass $x = By$. Also gilt $BAx = BA(By) = B(AB)y = By = x = Ix$ für alle x, und daher gilt auch $BA = I$.

Wenn man eine inverse matrix sucht, reicht es also die Gleichung $AB = I$ zu Lösen. Die obenstehende Bemerkung zeigt dann, dass automatisch auch $BA = I$ gilt.

(P24) Seien U, V und W reelle Vektorräume und weiter $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass $g \circ f : U \to W$ eine lineare Abbildung ist.

(LP24) Wir müssen zeigen, dass $(g \circ f)(x+y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$ gilt für alle $x, y \in U$, und dass $(g \circ f)(\lambda x) = \lambda(g \circ f)(x)$ gilt für alle $x \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Für die erste Behauptung rechnen wir

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+y) &= g(f(x+y)) \\ &= g(f(x) + f(y)) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)\,.\end{aligned}$$

In dem ersten und letzten Schritt haben wir die definition von $g \circ f$ verwendet, in dem zweiten Schritt die Linearität von f, und in dem dritten Schritt die Linearität von g.

Die zweite Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}g \circ f(\lambda x) &= g(f(\lambda x)) \\ &= g(\lambda f(x)) \\ &= \lambda g(f(x)) \\ &= \lambda g \circ f(x)\,.\end{aligned}$$

Hausaufgaben

(H36) Wir beweisen Satz 4.29 für einen Spezialfall: Sie $A \in \mathbb{R}^{3\times n}$ und $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem. Geben Sie zu jeder elementaren Zeilenumformung dieses Systems die entsprechende Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die diese Umformung durch Linksmultiplikation bewirkt. Zeigen Sie dann, dass diese Matrizen invertierbar sind (dies können Sie beispielsweise dadurch machen, dass Sie die inverse Matrix direkt angeben).

(LH36) Vertauschen von der ersten und zweiten Zeile wird bewirkt durch die Matrix

$$L_{1\leftrightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn man zweimal vertauscht ist man wieder am Anfang, also ist jede Vertauschung sein eigenes Inverses: man rechnet nach $L_{1\leftrightarrow 2}^2 = I$. Analog sind die Vertauschungen

$$L_{2\leftrightarrow 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$L_{1\leftrightarrow 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ihre eigene Inversen.

"Erste Zeile mit λ multiplizieren" wird bewirkt durch die Matrix

$$L_{1,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix ist natürlich die Matrix, die "erste Zeile mit $\frac{1}{\lambda}$ multiplizieren" bewirkt, d.h.

$$L_{1,\lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für das Multiplizieren der zweiten und dritten Zeile mit λ haben die Matrizen ein λ an der zweiten bzw. dritten Stelle der Diagonale, und die inverse Matrizen haben da ein $\frac{1}{\lambda}$.

"Die erste Zeile zu der zweiten Zeile addieren" wird bewirkt durch die Matrix

$$L_{II\to II+I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Marix ist die Matrix, die zu "die erste Zeile von der zweiten Zeile substrahieren" gehört, also $L_{II\to II+I}^{-1} = L_{II\to II-I}$, mit

$$L_{II\to II-I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog ist die inverse Matrix von $L_{A\to A+B}$, mit $A, B \in \{I, II, III\}$ und $A \neq B$ $L_{A\to A+B}^{-1} = L_{A\to A-B}$.

Die Matrizen, die den vierten elementare Zeilenumformungen entsprechen, erhält man jetzt als Kombination der anderen Matrizen. Möchte man beispielsweise die Matrix angeben, die das λ-fache der ersten Zeile zur zweiten addiert, so muss man erst die erste Zeile mit λ multiplizieren, dann die erste Zeile zu zweiten addieren, und dann die erste Zeil mit $\frac{1}{\lambda}$ multiplizieren. Die entsprechende Matrix ist also

$$L_{II\to II+\lambda I} = L_{1,\frac{1}{\lambda}} L_{II\to II+I} L_{1,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse zu dieser Matrix ist dann durch $L_{1,\lambda}^{-1} L_{II\to II+I}^{-1} L_{1,\frac{1}{\lambda}}^{-1}$ gegeben.

(4 Punkte)

(H37) Wir betrachten Produkte von Matrizen.

(a) Berechnen Sie alle möglichen Produkte XY mit $X, Y \in \{A, B, C, D\}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(La)

$$AB = (1) \quad AC = (2, 5, -2) \quad AD = (0, 2) \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$DB = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad DC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad DD = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie $A^8 \cdot A^{10}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Lb) Wir bemerken, dass A die Matrix ist, die zu der Linearen Abbildung gegeben durch $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_3$, und $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_1$ gehört. A^3 ist dann die Matrix, die zu der linearen Abbildung $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_3$ gehört, also gilt $A^3 = I$.
Die Matrix $A^8 \cdot A^{10}$ ist dann auch die Identität: $A^8 \cdot A^{10} = A^{18} = (A^3)^6 = I^6 = I$.

(2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \; : \; z \in \mathbb{Z} \right\}$$

eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation ist. Geben Sie eine zu G isomorphe Gruppe an (nur angeben, nicht beweisen).

(Lc) Die Multiplikation auf G ist assoziativ, da die Multiplikation von Matrizen assoziativ ist: für alle $g, g', g'' \in G$ gilt $(gg')g'' = g(g'g'')$. Das neutrale Element der Gruppe G ist die Einheitsmatrix $I = I_2$, die gehört zu $z = 0$: $Ig = gI = g$ für alle $g \in G$.
Für jede $z, z' \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z + z' & 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und jedes Element $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ von G hat ein Inverses $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix}$. Die Gruppe G ist isomorph zu der Abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$, und $z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ ist ein Isomorphismus $\mathbb{Z} \to G$.

(2 Punkte)

(6 Punkte)

(H38) Es sei die *Determinantenfunktion*[1]

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R} \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \Delta(A) = ad - bc \end{cases}$$

gegeben. Beweisen Sie

(a) Die Matrix A hat genau dann linear unabhängige Zeilen, wenn $\Delta(A) \neq 0$ gilt[2].

(La) Wenn (a, b) und (c, d) linear abhängig sind, d.h. entweder $(a, b) = \lambda(c, d)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $(c, d) = (0, 0)$, dann gilt $\Delta(A) = ad - bc = (\lambda c)d - (\lambda d)c = 0$ bzw. $\Delta(A) = a \cdot 0 - b \cdot 0 = 0$.

Umgekehrt impliziert $\Delta(A) = 0$ auch dass (a, b) und (c, d) linear abhängig sind. Wenn c und d nicht 0 sind, ist $ad - bc = 0$ äquivalent zu $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, und mit $\lambda = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ erhält man $\lambda(c, d) = (a, b)$. Wenn $c = 0$ gilt, dann gilt $ad - bc = ad = 0$, also entweder a oder d ist 0. Wenn d gleich 0 ist, dann ist $(c, d) = (0, 0)$, und die beiden Zeilen sind linear abhängig. Wenn a gleich 0 ist, dann sind $(a, b) = (0, b)$ und $(c, d) = (0, d)$ offensichtlich auch linear abhängig.

(2 Punkte)

(b) Ist $\Delta(A) \neq 0$, so ist die inverse Matrix zu A durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gegeben.

(Lb) Man kontrolliert einfach

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

(4 Punkte)

[1] Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 2$. Auch dann gibt es eine Determinantenfunktion $\Delta : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Auch diese Funktionen haben die Eigenschaft (a) und noch weitere schöne Eigenschaften. Der interessierte Leser schaue sich beispielsweise `http://de.wikipedia.org/wiki/Determinante_(Mathematik)` an.

[2] Weil der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang ist, sind die beiden äquivalenten Aussagen gleichbedeutend zu der linearen Unabhängigkeit der Spalten.

(H39) Zeichnen Sie ein Haus mit Ecken $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ und Dachspitze $(1,3)$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix B zur linearen Abbildung f, die durch $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ festgelegt ist.

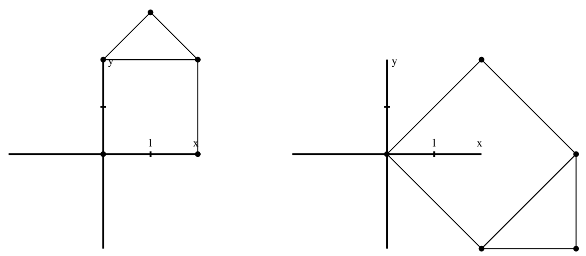
(La)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

(b) Unterwerfen Sie das Haus der linearen Abbildung f und zeichnen Sie das resultierende Objekt in die bestehende Zeichnung.

(Lb)



(2 Punkte)

(c) Wie verändert sich die Fläche des Hauses?

(Lc) Die wird zweimal so gross.

(1 Punkte)

(d) Bestimmen Sie den Betrag der Determinante von B, also $|\Delta(B)|$.

(Ld) $|\Delta(B)| = |-2| = 2$

(1 Punkte)

(6 Punkte)

(H40) [Bonusaufgabe] Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\operatorname{Rang}(A) = n$ gilt.

(3 Bonuspunkte)

(LH40) Wenn A invertierbar ist, dass ist für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ das LGS $Ax = b$ lösbar, nämlich durch $x = A^{-1}b$. Es folgt somit $\mathbf{Bild}\, A = \mathbb{R}^n$. Nach Aufgabe (H34a) folgt dann $\operatorname{Rang}(A) = n$.

Ist nun $\operatorname{Rang}(A) = n$ vorausgesetzt, so folgt ebenfalls mit (H34a), dass $\dim \mathbf{Bild}\, A = n$ gilt. Weil $\mathbf{Bild}\, A$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension n ist, folgt weiter $\mathbf{Bild}\, A = \mathbb{R}^n$. Zu jedem Basisvektor $\mathbf{e}_i$ der kanonischen Basis (als Spaltenvektor geschieben) gibt es daher ein $x_i \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax_i = \mathbf{e}_i$. Es folgt somit, dass die Matrix $B = (x_1 \cdots x_n)$ (die Matrix mit den x_i als Spalten) die Eigenschaft $AB = I_n$ hat. Nach der Argumentation aus Aufgabe (P23) folgt dann aber auch $BA = I_n$. Die Matrix B ist also die inverse Matrix zu A und A ist somit invertierbar.

(H41) [Bonusaufgabe] Wir bezeichnen mit $\mathbb{F}$ den Restklassenring modulo 2, also $\mathbb{F} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ und schreiben der Einfachheit halber für dessen Elemente [0] und [1] einfach 0 und 1. Weil 2 eine Primzahl ist, ist $\mathbb{F}$ sogar ein Körper. Analog zu der Situation bei den reellen Zahlen können wir die Menge der n-Tupel dieses Körpers

$$\mathbb{F}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}\}$$

mit einer Addition

$$\begin{aligned} + : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ (x, y) &\mapsto x + y := (x_1 \oplus y_1, \ldots, x_n \oplus y_n) \end{aligned} \tag{5}$$

und einer Skalarmulitplikation

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ (k, x) &\mapsto k \cdot x := (k \odot x_1, \ldots, k \odot x_n) \end{aligned} \tag{6}$$

versehen, um so einen $\mathbb{F}$-Vektorraum $(\mathbb{F}^n, +, \cdot)$ zu erhalten. Überlegen Sie sich nun, wie viele Abbildungen es von dem Vektorraum $\mathbb{F}^3$ in den Vektorraum $\mathbb{F}^2$ gibt, und wie viele davon linear sind.

(3 Bonuspunkte)

(LH41) Der Vektorraum $\mathbb{F}^3$ hat $2^3 = 8$ Vektoren, und $\mathbb{F}^2$ hat $2^2 = 4$ Vektoren. Eine (nicht notwendigerweise lineare) Abbildung wählt für jeden der 8 Vektoren in $\mathbb{F}^3$ genau einen der 4 Vektoren in $\mathbb{F}^2$, also gibt es $4^8 = 65536$ Abbildungen.

Eine lineare Abbildung von $\mathbb{F}^3$ nach $\mathbb{F}^2$ ist nun durch eine 2×3-Matrix gegeben, wobei die Einträge dieser Matrix 0 oder 1 sind. Es gibt somit $2^6 = 64$ solche Matrizen und dementsprechend 64 lineare Abbildungen.

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 4. Juli 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.