Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 11 SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P22) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei invertierbar. Zeigen Sie, dass es nur genau eine inverse Matrix zu A gibt (dies rechtfertigt die Notation A^{-1}).

(P23) Berechnen Sie A^{-1} zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(P24) Seien U, V und W reelle Vektorräume und weiter $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sei, dass $g \circ f : U \to W$ eine lineare Abbildung ist.

Hausaufgaben

(H36) Wir beweisen Satz 4.29 für einen Spezialfall: Sie $A \in \mathbb{R}^{3\times n}$ und $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem. Geben Sie zu jeder elementaren Zeilenumformung dieses Systems die entsprechende Matrix $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die diese Umformung durch Linksmultiplikation bewirkt. Zeigen Sie dann, dass diese Matrizen invertierbar sind (dies können Sie beispielsweise dadurch machen, dass Sie die inverse Matrix direkt angeben).

(4 Punkte)

(H37) Wir betrachten Produkte von Matrizen.

(a) Berechnen Sie alle möglichen Produkte XY mit $X, Y \in \{A, B, C, D\}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie $A^8 \cdot A^{10}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{Z} \right\}$$

eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation ist. Geben Sie eine zu G isomorphe Gruppe an (nur angeben, nicht beweisen).

(2 Punkte)

(6 Punkte)

(H38) Es sei die *Determinantenfunktion*[1]

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R} \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \Delta(A) = ad - bc \end{cases}$$

gegeben. Beweisen Sie

(a) Die Matrix A hat genau dann linear unabhängige Zeilen, wenn $\Delta(A) \neq 0$ gilt[2].

(2 Punkte)

(b) Ist $\Delta(A) \neq 0$, so ist die inverse Matrix zu A durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gegeben.

(2 Punkte)

(4 Punkte)

(H39) Zeichnen Sie ein Haus mit Ecken $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ und Dachspitze $(1,3)$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix B zur linearen Abbildung f, die durch $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ festgelegt ist.

(2 Punkte)

(b) Unterwerfen Sie das Haus der linearen Abbildung f und zeichnen Sie das resultierende Objekt in die bestehende Zeichnung.

(2 Punkte)

(c) Wie verändert sich die Fläche des Hauses?

(1 Punkte)

(d) Bestimmen Sie den Betrag der Determinante von B, also $|\Delta(B)|$.

(1 Punkte)

[1] Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 2$. Auch dann gibt es eine Determinantenfunktion $\Delta : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Auch diese Funktionen haben die Eigenschaft (a) und noch weitere schöne Eigenschaften. Der interessierte Leser schaue sich beispielsweise `http://de.wikipedia.org/wiki/Determinante_(Mathematik)` an.

[2] Weil der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang ist, sind die beiden äquivalenten Aussagen gleichbedeutend zu der linearen Unabhängigkeit der Spalten.

(6 Punkte)

(H40) [Bonusaufgabe] Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\operatorname{Rang}(A) = n$ gilt.

(3 Bonuspunkte)

(H41) [Bonusaufgabe] Wir bezeichnen mit $\mathbb{F}$ den Restklassenring modulo 2, also $\mathbb{F} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ und schreiben der Einfachheit halber für dessen Elemente [0] und [1] einfach 0 und 1. Weil 2 eine Primzahl ist, ist $\mathbb{F}$ sogar ein Körper. Analog zu der Situation bei den reellen Zahlen können wir die Menge der n-Tupel dieses Körpers

$$\mathbb{F}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}\}$$

mit einer Addition

$$\begin{aligned} + : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ (x, y) &\mapsto x + y := (x_1 \oplus y_1, \ldots, x_n \oplus y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

und einer Skalarmulitplikation

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ (k, x) &\mapsto k \cdot x := (k \odot x_1, \ldots, k \odot x_n) \end{aligned} \tag{2}$$

versehen, um so einen $\mathbb{F}$-Vektorraum $(\mathbb{F}^n, +, \cdot)$ zu erhalten. Überlegen Sie sich nun, wie viele Abbildungen es von dem Vektorraum $\mathbb{F}^3$ in den Vektorraum $\mathbb{F}^2$ gibt, und wie viele davon linear sind.

(3 Bonuspunkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 4. Juli 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.