Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 10 SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P20) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und f die in Satz 4.4 definierte Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & Ax \end{cases}$$

Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes und zeigen Sie, dass f auch die Eigenschaft (L2) besitzt.

(LP20) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot x) &= A(\alpha \cdot x) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(\alpha x_1) + \dots + a_{1n}(\alpha x_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(\alpha x_1) + \dots + a_{mn}(\alpha x_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) \\ \vdots \\ \alpha(a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot (Ax) \\ &= \alpha \cdot f(x)\,. \end{aligned}$$

Das ist die Eigenschaft (L2).

(P21) Geben Sie für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x,y) \mapsto (2x, x+y, x-y)$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ (x,y,z) \mapsto (x+y-z, x+y+z, 2z)$ jeweils eine Basis von $\operatorname{Bild} f, \operatorname{Bild} g, \operatorname{Kern} f$ und $\operatorname{Kern} g$ an[1].

Tipp: Wenn Sie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ finden, sodass $f = f_A$ und $g = f_B$ ist, dann können Sie eventuell einige Rechnungen vereinfachen.

[1]Hinweis: Das 0-Tupel $\emptyset$ wird als linear unabhängig definiert. Weil $L(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$ gilt, ist $\emptyset$ die Basis des 0-dimensionalen Vektorraums $\{\mathbf{0}\}$.

(LP21) Die Matrix A mit der Eigenschaft $f = f_A$ hat in der ersten Zeile $(2,0)$, in der zweiten Zeile $(1,1)$ und in der dritten Zeile $(1,-1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 4.4 ist f linear. Das Bild von f_A ist die lineare Hülle der Spalten von A (wird in H34a noch allgemein bewiesen); aus

$$f((\alpha,\beta)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

folgt $\operatorname{Bild} f = \{f((\alpha,\beta)) \,:\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\} = L((2,1,1),(0,1,-1))$.

Da die Spalten linear unabhängig sind ($\alpha(2,1,1) + \beta(0,1,-1) = 0$ impliziert $\alpha = \beta = 0$), ist $((2,1,1),(0,1,-1))$ eine Basis von $\operatorname{Bild} f$.

Wir betrachten $\operatorname{Kern} f$. Wenn $f((x,y)) = 0$ gilt, dann gilt $2x = 0$ und $x + y = 0$, also gilt $x = 0$ und $y = 0$. Dies zeigt, dass $\operatorname{Kern} f$ gleich $\{\mathbf{0}\}$ ist. Daher ist $\emptyset$ eine Basis von $\operatorname{Kern} f$.

Die Matrix B, sodass $g = f_B$ gilt, hat in der ersten Zeile $(1,1,-1)$, in der zweiten Zeile $(1,1,1)$ und in der dritten Zeile $(0,0,2)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 4.4 ist g linear. Analog zu obiger Rechnung ist $\operatorname{Bild} g$ die lineare Hülle von den Spalten von B (wird in H34a noch allgemein bewiesen),

$$\begin{aligned}
\operatorname{Bild} g &= \{g((\alpha,\beta,\gamma)) \,:\, (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \,:\, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,:\, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\} \\
&= L((1,1,0),(1,1,0),(-1,1,2)).
\end{aligned}$$

Die Spalten bilden aber keine Basis, da sie offensichtlich linear abhängig sind. Wir bemerken, dass $L((1,1,0),(1,1,0),(-1,1,2)) = L((1,1,0),(-1,1,2))$ gilt, und da $(1,1,0)$ und $(-1,1,2)$ linear unabhängig sind ($\alpha(1,1,0) + \beta(-1,1,2) = 0$ impliziert $\alpha = \beta = 0$), ist $((1,1,0),(-1,1,2))$ eine Basis von $\operatorname{Bild} g$.

Wir betrachten $\operatorname{Kern} g$. Die gleichung $g(x,y,z)$ liefert $z = 0$ (dritte Komponente), und $x + y = 0$ (erste und zweite Komponente). Mit $y = \alpha$ als freie Variable erhalten wir $(x,y,z) = \alpha(-1,1,0)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, also ist $\{(-1,1,0)\}$ eine Basis von $\operatorname{Kern} g$.

Hausaufgaben

(H32) Wie betrachten Abbildungen des Standardraums $\mathbb{R}^3$ auf sich selbst:

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y + 3z, y + 2z, 3x + y) \end{cases}$$

eine lineare Abbildung ist. Falls es eine lineare Abbildung ist, bestimmen Sie bitte $\dim \operatorname{Bild} f$ und $\dim \operatorname{Kern} f$.

(La) Es ist eine lineare Abbildung, denn $f = f_A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(vgl. Satz 4.4). Wir betrachten $\operatorname{Kern} f$. Die Gleichung $f((x, y, z)) = \mathbf{0}$ kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wir Lösen dies mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die einzige Lösung ist also $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, und somit ist $\operatorname{Kern} f = \{\mathbf{0}\}$ und $\dim \operatorname{Kern} f = 0$. Wegen Satz 4.9 gilt nun $\dim \operatorname{Bild} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Kern} f = 3 - 0 = 3$.

(2 Punkte)

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y - z, x - yz, 2x - y) \end{cases}$$

eine lineare Abbildung ist. Falls es eine lineare Abbildung ist, bestimmen Sie bitte $\dim \operatorname{Bild} g$ und $\dim \operatorname{Kern} g$.

(Lb) Es ist keine lineare Abbildung: $g((0, 1, 1)) = (0, -1, -1)$, aber $g(2 \cdot (0, 1, 1)) = (0, -4, -2) \neq 2 \cdot (0, -1, -1)$.

(2 Punkte)

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - 2y - z, x + 10y + 16z, -3x + 4y + 3z) \end{cases}$$

eine lineare Abbildung ist. Falls es eine lineare Abbildung ist, bestimmen Sie bitte $\dim \operatorname{Bild} h$ und $\dim \operatorname{Kern} h$.

(Lc) Es ist eine lineare Abbildung, denn $h = f_B$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 10 & 16 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(vgl. Satz 4.4). Wir bestimmen Kern h, und lösen die Gleichung $h((x, y, z)) = \mathbf{0}$. Da $h = f_B$ ist, kann man das schreiben als

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 10 & 16 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Mit dem Gauß-Algorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 10 & 16 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 10 & 16 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 10 & 16 \\ 0 & -22 & -33 \\ 0 & 34 & 51 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 10 & 16 \\ 0 & -22 & -33 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

Rückwärtseinsetzen liefert $z = \alpha$ (freie Variabele), $y = -\frac{3}{2}\alpha$ und $x = -\alpha$, also $(x, y, z) = \alpha(-1, -\frac{3}{2}, 1)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir erhalten $\{(-1, -\frac{3}{2}, 1)\}$ als Basis für Kern h, also ist $\dim \operatorname{Kern} h = 1$.

(Das hätten wir auch gleich sagen können, ohne Rückwärtseinsetzen: wenn es nach dem Gauß-Algorithmus k freie Variabelen gibt, ist die Dimension vom Kern immer k.)

Wegen Satz 4.9 gilt nun $\dim \operatorname{Bild} h = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Kern} h = 3 - 1 = 2$.

(2 Punkte)

(6 Punkte)

(H33) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Nach Satz 4.4 gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A(x + y) = Ax + Ay \quad \text{und} \quad A(\alpha x) = \alpha(Ax) .$$

Nutzen Sie diese Aussagen, um den Satz 3.4 und die Bemerkung 3.13.2 zu beweisen. Hierfür zeigen Sie bitte:

(a) Die Lösungsmenge $L(A)$ des homogenen LGS $Ax = \mathbf{0}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

(La) Die Lösungsmenge $L(A)$ ist nicht leer, da $\mathbf{0}$ immer eine Lösung ist von $Ax = \mathbf{0}$.

Wir zeigen $x, y \in L(A) \Rightarrow x + y \in L(A)$. Wenn x, y in $L(A)$ sind, dann gilt $Ax = \mathbf{0}$ und $Ay = \mathbf{0}$. Somit gilt auch $A(x + y) = Ax + Ay = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, und $x + y \in L(A)$.

Wir zeigen $x \in L(A) \Rightarrow \alpha \cdot x \in L(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Wenn x in $L(A)$ ist, $Ax = \mathbf{0}$, dann gilt auch $A(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (Ax) = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, und $\alpha \cdot x$ ist ein Element von $L(A)$.

Da $L(A)$ nicht leer ist, und abgeschlossen bzgl. Addition und Skalarmultiplikation, ist es ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

(2 Punkte)

(b) Ist $b \in \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des LGS $Ax = b$, dann ist die Lösungsmenge

$$L(A, b) = \{x_0 + x \,:\, x \in L(A)\}\,.$$

(Lb) Ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ ist eine Lösung von $Ay = b$ genau dann, wenn $A(y - x_0) = Ay - Ax_0 = b - b = \mathbf{0}$ gilt. Das heißt, y ist eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ay = b$ genau dann, wenn $x = y - x_0$ eine Lösung ist des homogenen Gleichungungssystems $Ax = \mathbf{0}$ ist. Die Lösungen y von $Ay = b$ sind daher genau die Vektoren $y = x_0 + x$, bei denen x eine Lösung von $Ax = \mathbf{0}$ ist.

(2 Punkte)

(4 Punkte)

(H34) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die lineare Abbildung die wir nach Satz 4.4 erhalten. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Seien $v_1, \dots, v_n$ die Spalten der Matrix A. Es gilt $\operatorname{Bild} A = L(v_1, \dots, v_n)$ und somit $\dim \operatorname{Bild} A = \operatorname{Rang} A$.

Zusatzinformation: Für die Abbildung f_A wird der **Rang** von f_A als

$$\operatorname{Rang} f_A := \dim \operatorname{Bild} f_A$$

definiert.

(2 Punkte)

(La) Der Beweis folgt direkt mit den Definitionen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Bild} A &= \operatorname{Bild} f_A \\
&= \{f_A(x) \,:\, x \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{Ax \,:\, x \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \,:\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \,:\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \\
&= L(v_1, \dots, v_n)\,.
\end{aligned}$$

(b) Für die Lösungsmenge $L(A)$ des LGS $Ax = \mathbf{0}$ gilt

$$\dim L(A) = n - \operatorname{Rang} A\,.$$

(2 Punkte)

(Lb) Die Dimensionsformel (Satz 4.9) besagt

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Kern} f_A + \dim \operatorname{Bild} f_A\,.$$

Es gilt $\dim \mathbb{R}^n = n$ nach Beispiel 2.50.1, $\operatorname{Kern} f_A = L(A)$ nach Beispiel 4.6.2 und $\dim \operatorname{Bild} f_A = \dim \operatorname{Bild} A = \operatorname{Rang} A$ nach Aufgabenteil (a). Wenn wir dies in obige Formel einsetzen, erhalten wir

$$n = \dim L(A) + \operatorname{Rang}(A)$$

und nach Umstellen die gewünschte Aussage.

(4 Punkte)

(H35) Seien V, W Vektorräume und $f : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung. Weiter sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $w_i := f(v_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von W ist.

(LH35) Wir nehmen an, dass V und W reellen Vektorräume sind. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist, und da f linear ist, gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild} f &= \{f(v) \,:\, v \in V\} \\ &= \{f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) \,:\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) \,:\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \,:\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \\ &= L(w_1, \ldots, w_n)\,. \end{aligned}$$

Wegen der Surjektivität von f gilt nun $\operatorname{Bild} f = W$, und somit $L(w_1, \ldots, w_n) = W$.

Wir müssen nur noch zeigen, dass $(w_1, \ldots, w_n)$ linear unabhängig ist. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n = \mathbf{0}$ gilt. Da f linear ist, gilt dann

$$\begin{aligned} \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n &= \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) \\ &= f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) \\ &= \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Da f injektiv ist, folgt nun dass $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$ gilt. Wegen der linearen Unabhängigheit von $(v_1, \ldots, v_n)$ ist das äquivalent zu $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Dies zeigt, dass $(w_1, \ldots, w_n)$ linear unabhängig ist. Da wir schon wussten, dass $L(w_1, \ldots, w_n) = W$ gilt, ist $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von W.

Bemerkung: wenn es eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, nennt man die Vektorräume V und W *isomorph*. Wir haben jetzt folgendes gezeigt: *wenn zwei endlichdimensionalen Vektorräume isomorph sind, haben sie die gleiche Dimension.*

Es ist nicht schwer auch das Umgekehrte zu zeigen. Wenn V eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ hat, und W hat eine Basis $(w_1, \ldots, w_n)$, dann definiert $f : \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \mapsto \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$ eine lineare bijektive Abbildung $f : V \to W$. Zwei endlichdimensionalen Vektorräume sind daher isomorph genau wenn sie von gleicher Dimension sind. Insbesondere haben wir jetzt bewiesen:

Jeder reelle Vektorraum der Dimension n ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$.

(6 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 27. Juni 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.