Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundbildung Lineare Algebra und Analytische Geometrie (LPSI/LS-M2)

Blatt 10 — SoSe 2011 - C. Curilla/ B. Janssens

Präsenzaufgaben

(P20) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und f die in Satz 4.4 definierte Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & Ax \end{cases}$$

Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes und zeigen Sie, dass f auch die Eigenschaft (L2) besitzt.

(P21) Geben Sie für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x,y) \mapsto (2x, x+y, x-y)$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ (x,y,z) \mapsto (x+y-z, x+y+z, 2z)$ jeweils eine Basis von $\operatorname{Bild} f, \operatorname{Bild} g, \operatorname{Kern} f$ und $\operatorname{Kern} g$ an[1].

Tipp: Wenn Sie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ finden, sodass $f = f_A$ und $g = f_B$ ist, dann können Sie eventuell einige Rechnungen vereinfachen.

Hausaufgaben

(H32) Wie betrachten Abbildungen des Standardraums $\mathbb{R}^3$ auf sich selbst:

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, y+2z, 3x+y) \end{cases}$$

eine lineare Abbildung ist. Falls es eine lineare Abbildung ist, bestimmen Sie bitte $\dim \operatorname{Bild} f$ und $\dim \operatorname{Kern} f$.

(2 Punkte)

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-yz, 2x-y) \end{cases}$$

eine lineare Abbildung ist. Falls es eine lineare Abbildung ist, bestimmen Sie bitte $\dim \operatorname{Bild} g$ und $\dim \operatorname{Kern} g$.

(2 Punkte)

[1] Hinweis: Das 0-Tupel $\emptyset$ wird als linear unabhängig definiert. Weil $L(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$ gilt, ist $\emptyset$ die Basis des 0-dimensionalen Vektorraums $\{\mathbf{0}\}$.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-2y-z, x+10y+16z, -3x+4y+3z) \end{cases}$$

eine lineare Abbildung ist. Falls es eine lineare Abbildung ist, bestimmen Sie bitte $\dim \operatorname{Bild} h$ und $\dim \operatorname{Kern} h$.

(2 Punkte)

(6 Punkte)

(H33) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Nach Satz 4.4 gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A(x+y) = Ax + Ay \quad \text{und} \quad A(\alpha x) = \alpha(Ax)\,.$$

Nutzen Sie diese Aussagen, um den Satz 3.4 und die Bemerkung 3.13.2 zu beweisen. Hierfür zeigen Sie bitte:

(a) Die Lösungsmenge $L(A)$ des homogenen LGS $Ax = \mathbf{0}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

(2 Punkte)

(b) Ist $b \in \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des LGS $Ax = b$, dann ist die Lösungsmenge

$$L(A,b) = \{x_0 + x \,:\, x \in L(A)\}\,.$$

(2 Punkte)

(4 Punkte)

(H34) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die lineare Abbildung die wir nach Satz 4.4 erhalten. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Seien $v_1, \ldots, v_n$ die Spalten der Matrix A. Es gilt $\operatorname{Bild} A = L(v_1, \ldots, v_n)$ und somit $\dim \operatorname{Bild} A = \operatorname{Rang} A$.

Zusatzinformation: Für die Abbildung f_A wird der **Rang** von f_A als

$$\operatorname{Rang} f_A := \dim \operatorname{Bild} f_A$$

definiert.

(2 Punkte)

(b) Für die Lösungsmenge $L(A)$ des LGS $Ax = \mathbf{0}$ gilt

$$\dim L(A) = n - \operatorname{Rang} A\,.$$

(2 Punkte)

(4 Punkte)

(H35) Seien V, W Vektorräume und $f : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung. Weiter sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $w_i := f(v_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von W ist.

(6 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 27. Juni 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.