Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Blatt 8 WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S. Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P27) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \{[0], [1], ..., [m-1]\}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Modulo-Relation R_m. In der Vorlesung hatten wir die Verknüpfungen

$$[a] \oplus [b] := [a+b] \quad \text{und} \quad [a] \odot [b] := [a \cdot b]$$

definiert. Außerdem haben wir die Bemerkung gemacht, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind, also dass für $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ mit $[a] = [a']$ und $[b] = [b']$ gilt:

$$[a] \oplus [b] = [a'] \oplus [b'] \quad \text{und} \quad [a] \odot [b] = [a'] \odot [b'].$$

(a) Machen Sie sich die Wohldefiniertheit von $\oplus$ und $\odot$ an Beispielen deutlich.

(b) Beweisen Sie sie.

(c) Wir versuchen, eine weitere Verknüpfung auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ durch $[a] * [b] := [|a-b|]$ zu definieren. Liefert diese Vorschrift eine wohldefinierte Verknüpfung?

(P28) (a) Erstellen Sie die Verknüpfungstafeln für $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

(b) Was fällt auf, wenn Sie die Multiplikation in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation in $\mathbb{Z}$ vergleichen?

(c) Die Addition in dem Ring $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ hat immer inverse Elemente. Was ist mit der Multiplikation in $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ und in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$?

Hausaufgaben

(H29) Wir betrachten den Ring $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

(a) Bestimmen Sie alle Elemente $[a] \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ für die es ein Inverses bzgl. der Multiplikation $\odot$ gibt (d.h. für die es $[b] \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ mit $[a] \odot [b] = [1]$ gibt), und geben Sie diese an. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie alle Elemente $[a] \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ($[a] \neq [0]$) für die es $[b] \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ($[b] \neq [0]$) gibt mit $[a] \odot [b] = [0]$. Elemente dieser Art nennt man *Nullteiler*. Geben Sie für jedes $[a]$ alle dazugehörigen $[b]$ an. (1 Punkt)

(2 Punkte)

(H30) Gegeben seien die natürlichen Zahlen $a = 100025$ und $b = 12312$.

(a) Bestimmen Sie den $\mathrm{ggT}(a, b)$ mit dem Euklidischen Algorithmus. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie das $\mathrm{kgV}(a, b)$. (1 Punkt)

(2 Punkte)

(H31) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $S_n := \{f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} : f \text{ ist bijektiv}\}$ die Menge aller bijektiven Abbildung von $\{1, ..., n\}$ auf sich selbst.

(a) Beweisen Sie, dass die Menge S_n mit der Verkettung $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe bildet. Ist diese Gruppe kommutativ? (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Mächtigkeit $|S_n|$ von S_n. (1 Punkt)

(c) Stellen Sie sich eine quadratische Holzplatte mit Kantenlänge $x\,\mathrm{cm} > 0$ vor, wobei jede Ecke mit einer anderen Farbe gefärbt ist.
Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, diese Holzplatte auf eine vorgegebene ebene quadratische Fläche mit Flächeninhalt $x^2\,\mathrm{cm}$ zu legen? Was hat das mit S_4 zu tun? (2 Punkte)

(6 Punkte)

(H32) Wir definieren zwei Verknüpfungen auf dem $\mathbb{R}^2$ durch

$$+\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$\text{und} \quad \cdot\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Ring ist. Ist dieser Ring kommutativ? (4 Punkte)

(4 Punkte)

(H33) Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Definiere F_1 und F_2 durch

$$F_1\colon \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(B), \quad S \mapsto f(S) \quad \text{und}$$
$$F_2\colon \mathrm{Pot}(B) \to \mathrm{Pot}(A), \quad T \mapsto f^{-1}(T)\ .$$

Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen beziehungsweise Implikationen:

(a) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ F_1 ist injektiv $\Leftrightarrow$ F_2 ist surjektiv. (2 Punkte)

(b) f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ F_1 ist surjektiv $\Leftrightarrow$ F_2 ist injektiv. (2 Punkte)

(c) f ist bijektiv $\Rightarrow$ F_1 und F_2 sind bijektiv und es gilt $F_1^{-1} = F_2$. (2 Punkte)

(6 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 3. Januar 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.

[1]

Wir wünschen Ihnen frohe Ferien und einen guten Rutsch ins Jahr 2011!

[1]Illustration von AKARAKINGDOMS, zu finden auf http://www.freedigitalphotos.net/images/Christmas_g54-Merry_Christmas_Set_p22838.html