Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Blatt 7 WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S. Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P24) Sei $m \in \mathbb{N}$ und R_m die „Modulo-Relation"

$$R_m := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \equiv b \mod m\}$$

(vgl.Definition (2.3) im Skript „Grundlagen der Mathematik" von Hubert Kiechle aus dem WiSe 07/08). Wir haben gezeigt, dass R_m eine Äquivalenzrelation ist. Zu jedem $a \in \mathbb{Z}$ können wir die Äquivalenzklasse

$$[a] := \{x \in \mathbb{Z} : (a,x) \in R_m\} = \{x \in \mathbb{Z} : a \equiv x \mod m\}$$

bilden. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Aus welchen Zahlen besteht $[a]$?

(b) Wie viele (unterschiedliche) Äquivalenzklassen gibt es?

(c) Bilden die unterschiedlichen Äquivalenzklassen eine Partition von $\mathbb{Z}$?

(P25) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n$ gerade.
Hinweis: Eine Zahl heißt gerade, wenn sie durch 2 teilbar ist.

(P26) Bestimme die Primfaktorzerlegung von $2010 \in \mathbb{N}$.

Hausaufgaben

(H25) Geben Sie alle $n \in \mathbb{N}$ an, für die

$$\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$$

gilt, und beweisen Sie Ihr Ergebnis. **(5 Punkte)**

(H26) Geben Sie alle $n \in \mathbb{N}$ an, für die

$$2^n > n^3$$

ist, und beweisen Sie Ihr Ergebnis. **(5 Punkte)**
Hinweis: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ die Ungleichung

$$n > 3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Sie dürfen diese Formel ohne Beweis verwenden. Beweisen Sie sie, so erhalten Sie einen Bonuspunkt. (1 Bonuspunkt)

(H27) In der Vorlesung hatten wir die folgende Bemerkung gemacht:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_j}$ die Primfaktorzerlegung von n. Dann gilt für $m \in \mathbb{N}$:

$$m|n \quad \Leftrightarrow \quad m \text{ ist von der Form } m = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\beta_j} \text{ mit } \beta_j \in \{0, 1, ..., \alpha_j\}.$$

Sei nun $a = 38808, b = 21294$ und $c = 90$.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Primfaktorzerlegung $\text{ggT}(a, b)$. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Primfaktorzerlegung $\text{kgV}(a, b)$ (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie alle natürlichen Teiler von c. (2 Punkte)

(d) Seien p_1, p_2, p_3, p_4 Primzahlen. Wie viele natürliche Teiler hat die Zahl $n = p_1^2 \cdot p_2^3 \cdot p_3^2 \cdot p_4^5$? (1 Bonuspunkt)

(e) Beweisen Sie die obige Vorlesungsbemerkung. (2 Bonuspunkte)

(6 Punkte)

(H28) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $a^2 \equiv b^2 \mod m$ notwendig für $a \equiv b \mod m$. (2 Punkte)

(b) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $a \equiv b \mod m$ notwendig für $a^2 \equiv b^2 \mod m$. (2 Punkte)

(4 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 13. Dezember 2010** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.