



Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Lösungen Blatt 6 WiSe 2010/11 - Curilla/Koch/Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

- (P17) Die angegebenen Abbildungen sind Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . In der Vorlesung ist besprochen worden, dass man Injektivität und Surjektivität solcher Abbildungen an den möglichen Schnittpunkten zwischen deren Graphen und Parallelen zur x -Achse erkennen kann. Dies wenden wir im Folgenden an.

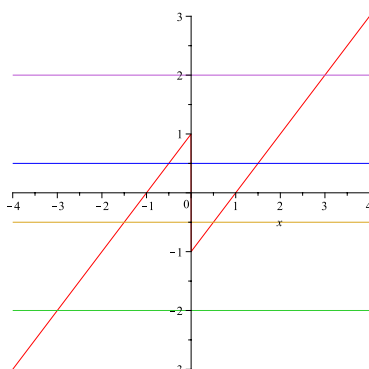


Abbildung 1: Der Graph von f mit Beispielgeraden.

Die beiden mittleren Geraden schneiden den (rot gezeichneten) Graphen von f in je 2 Punkten, f ist folglich nicht injektiv. Da der Graph sich wie angedeutet nach links unten und rechts oben fortsetzt, ist die Abbildung surjektiv.

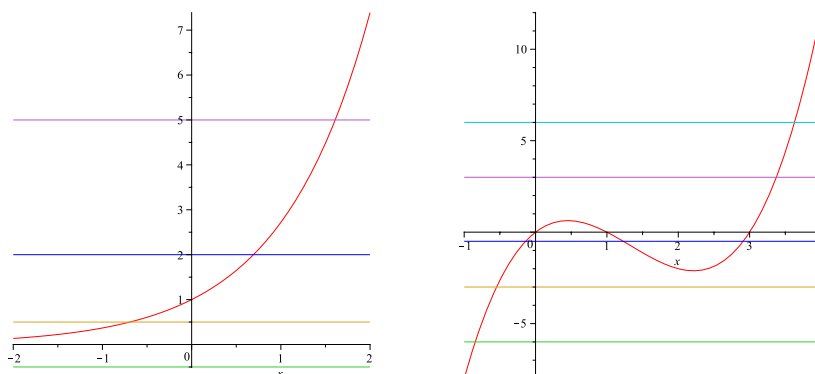


Abbildung 2: Die Graphen von g und h mit Beispielgeraden.

Für g gilt: Die Gerade unterhalb der x -Achse schneidet den Graphen von g nicht.

g ist also nicht surjektiv. Andererseits lässt sich keine Parallele zur x -Achse finden, die mehr als einen Schnittpunkt hat, g ist also injektiv.

Die Abbildung h ist nicht injektiv, da die eingezeichnete Gerade knapp unterhalb der x -Achse den Graphen dreimal schneidet. In der abgebildeten Darstellung lässt sich keine Parallele zur x -Achse einzeichnen, die h nicht schneidet; da h sich wie angedeutet fortsetzt, ist die Abbildung surjektiv.

- (P18) (a) $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 2], x \mapsto x + 1$ ist bijektiv.
 (b) $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 2], x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv (z.B. hat $2 \in [0, 2]$ kein Urbild).
 (c) $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 2], x \mapsto 2 \cdot |x|$ ist surjektiv, aber nicht injektiv:
 Ist $y \in [0, 2]$ gegeben, so gilt

$$f(x) = 2 \cdot |x| = y \Leftrightarrow |x| = \frac{y}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{y}{2}, \frac{y}{2} \right\} \subset [-1, 1].$$

Andererseits gilt offensichtlich $f(-1) = 2 = f(1)$.

- (d) $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 2], x \mapsto 0$ ist weder surjektiv noch injektiv.
- (P19) (a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass es $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)$ injektive Abbildungen von X nach Y gibt, wenn X eine m -elementige Menge, Y eine n -elementige Menge und $m \leq n$ ist. Es gibt in unserem Fall also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ verschiedene Injektionen von A nach B .
 Ebenso haben wir uns in der Vorlesung überlegt, dass es $n!$ verschiedene Bijektionen einer n -elementigen Menge auf eine andere n -elementige Menge gibt, in diesem Fall also $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Bijektionen. Die Aussage ist also falsch.
- (b) Das Bild einer Abbildung $f: A \rightarrow B$ ist gleich $f(A) = \{f(1), f(2), f(3)\}$, enthält also höchstens (!) drei Elemente. Damit kann niemals $f(A) = B$ sein, f ist also nie surjektiv und die Aussage ist falsch.
- (c) Zur Injektivität: Es ist beispielsweise $(4, -6) \neq (-2, 12)$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, aber es gilt $f(4, -6) = -24 = f(-2, 12)$, die Abbildung ist nicht injektiv.
 Zur Surjektivität: Sei $z \in \mathbb{Z}$ beliebig, also ein beliebiges Element aus dem Bildbereich von f . Dann ist $(1, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, also ein Element im Definitionsbereich von f , und es gilt $f(1, z) = z$. Folglich ist f surjektiv.
 Die Aussage ist somit wahr.
- (d) Zwei Mengen heißen nach Definition gleichmächtig, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt. Dies bedeutet aber nicht, dass jede Abbildung zwischen diesen Mengen eine Bijektion sein muss.
 Die Aussage ist also falsch, unabhängig davon, ob \mathbb{Z} und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gleichmächtig sind (tatsächlich kann man beweisen, daß \mathbb{Z} und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gleichmächtig sind).

Hausaufgaben

- (H21) Zur Injektivität: Seien $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Da f injektiv ist, muss dann auch $f(x) \neq f(y)$ sein. Damit ist aber wegen der Injektivität von g auch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \neq g(f(y)) = (g \circ f)(y),$$

und $g \circ f$ ist injektiv.

Zur Surjektivität: Sei $c \in C$ beliebig. Wir suchen ein Urbild von c unter $g \circ f$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da auch f surjektiv ist, gibt es zu diesem b ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Dieses a ist das gesuchte Urbild zu c , denn es gilt nach Konstruktion $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

- (H22) Da wir nicht nachgerechnet haben, ob f beziehungsweise g bijektiv sind, dürfen wir eigentlich nicht von Umkehrfunktionen sprechen. Wir können aber versuchen, Umkehrfunktionen zu konstruieren; deren Existenz impliziert dann wiederum die Bijektivität.

Wir suchen zunächst eine Abbildung $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \circ \tilde{f} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ und $\tilde{f} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Es ist aber für alle $y \in \mathbb{R}$

$$y = (f \circ \tilde{f})(y) \Leftrightarrow y = 2 \cdot \tilde{f}(y) - 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y + 3 = \tilde{f}(y).$$

Man kann nachrechnen, dass auch $(\tilde{f} \circ f)(x) = x$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist \tilde{f} die gesuchte Umkehrfunktion.

Nun suchen wir $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g \circ \tilde{g} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ und $\tilde{g} \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Wie eben erhalten wir

$$\begin{aligned} y = (g \circ \tilde{g})(y) &\Leftrightarrow y = \begin{cases} \tilde{g}(y) + 2 & \text{falls } \tilde{g}(y) < 1, \\ 3\tilde{g}(y) & \text{falls } \tilde{g}(y) \geq 1. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \tilde{g}(y) + 2 & \text{falls } \tilde{g}(y) < 1, \\ y = 3\tilde{g}(y) & \text{falls } \tilde{g}(y) \geq 1. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{g}(y) = y - 2 & \text{falls } \tilde{g}(y) < 1, \\ \tilde{g}(y) = \frac{1}{3}y & \text{falls } \tilde{g}(y) \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Existiert \tilde{g} , so gilt demnach insbesondere

$$(\tilde{g}(y) < 1 \Rightarrow y - 2 < 1) \wedge (\tilde{g}(y) \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{3}y \geq 1),$$

also

$$(\tilde{g}(y) < 1 \Rightarrow y < 3) \wedge (\tilde{g}(y) \geq 1 \Rightarrow y \geq 3)$$

und es ist $\tilde{g}(y) < 1$ genau dann, wenn $y < 3$ ist. Wir setzen also

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x < 3, \\ \frac{1}{3}x & \text{falls } x \geq 3. \end{cases}$$

Da auch $\tilde{g} \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}$ ist, ist \tilde{g} die Umkehrfunktion zu g .

(Bemerkung: Man kann die Umkehrfunktion zu g auch wie folgt berechnen: Die Abbildung g lässt sich auffassen als zusammengesetzt aus zwei bijektiven Abbildungen $g_1:]-\infty, 1[\rightarrow]-\infty, 3[$ und $g_2: [1, \infty[\rightarrow [3, \infty[$ (man überzeuge sich von der Korrektheit der angegebenen Bildbereiche!). Dementsprechend kann man auch die jeweiligen Umkehrfunktionen zu g_1 und g_2 bestimmen und, anschaulich gesprochen, zu einer Umkehrfunktion für g zusammensetzen.)

Für die Verkettung von f mit sich selbst errechnet man $(f \circ f)(x) = f(2x - 6) = 2 \cdot (2x - 6) - 6 = 4x - 18$.

Für g gilt: Es ist

$$\begin{aligned}
 (g \circ g)(x) &= \begin{cases} g(x+2) & \text{falls } x < 1, \\ g(3x) & \text{falls } x \geq 1. \end{cases} \\
 &= \begin{cases} g(x+2) & \text{falls } x+2 < 3, \\ g(3x) & \text{falls } 3x \geq 3. \end{cases} \\
 &= \begin{cases} g(x+2) & \text{falls } x+2 < 1, \\ g(x+2) & \text{falls } 1 \leq x+2 < 3, \\ g(3x) & \text{falls } 3x \geq 3. \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x+4 & \text{falls } x+2 < 1, \\ 3x+6 & \text{falls } 1 \leq x+2 < 3, \\ 9x & \text{falls } 3x \geq 3. \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x+4 & \text{falls } x < -1, \\ 3x+6 & \text{falls } -1 \leq x < 1, \\ 9x & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

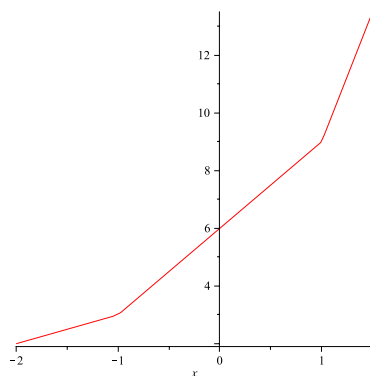


Abbildung 3: Der Graph von $g \circ g$.

(H23) (a) Wir müssen in beiden Fällen zeigen, dass es eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen gibt.

- Setze

$$f : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad x \mapsto \frac{d-c}{b-a} \cdot (x-a) + c.$$

Zunächst ist zu zeigen, dass der angegebene Bildbereich korrekt ist, f also wirklich nur Werte in $[c, d]$ annimmt: Wegen $d > c$ und $b > a$ ist $d-c > 0$ und $b-a > 0$, also $\frac{d-c}{b-a} > 0$. Für $x \in [a, b]$ ist $x \geq a$, also $x-a \geq 0$. Insgesamt ergibt sich also

$$\frac{d-c}{b-a} \cdot (x-a) \geq 0$$

und damit

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a} \cdot (x-a) + c \geq c.$$

Andererseits ist für $x \in [a, b]$ stets $x \leq b$, also $x-a \leq b-a$ und damit $\frac{x-a}{b-a} \leq 1$. Folglich ist

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a} \cdot (x-a) + c = (d-c) \frac{x-a}{b-a} + c \leq (d-c) + c = d.$$

Die beiden Ungleichungen liefern zusammen $c \leq f(x) \leq d$, also $f(x) \in [c, d]$.

Als nächstes zeigen wir, dass f injektiv ist. Wir führen den Beweis indirekt: Angenommen, es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wir formen um:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} \cdot (x_1-a) + c = \frac{d-c}{b-a} \cdot (x_2-a) + c \\ &\Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} \cdot (x_1-a) = \frac{d-c}{b-a} \cdot (x_2-a) \\ &\Leftrightarrow x_1-a = x_2-a \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\frac{d-c}{b-a} \neq 0$ ist, wir also durch diesen Bruch teilen können.

Es bleibt zu zeigen, dass f surjektiv ist. Sei dazu $y \in [c, d]$ gegeben, dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} \cdot (x-a) + c = y \\ &\Leftrightarrow x-a = (y-c) \cdot \frac{b-a}{d-c} \\ &\Leftrightarrow x = a + \frac{b-a}{d-c} \cdot (y-c) = a + \frac{y-c}{d-c} \cdot (b-a). \end{aligned}$$

Da $c \leq y \leq d$ ist, ist $0 \leq \frac{y-c}{d-c} \leq 1$, und man sieht wie oben, dass $a + \frac{y-c}{d-c} \cdot (b-a) \in [a, b]$, also ein zulässiges Urbild für y ist. Damit ist f auch surjektiv, und die Gleichmächtigkeit von $[a, b]$ und $[c, d]$ ist bewiesen.

- Betrachte die Abbildung f wie zuvor und die Einschränkung

$$f|_{]a,b[} :]a,b[\rightarrow [c,d] : x \mapsto \frac{d-c}{b-a} \cdot (x-a) + c.$$

Das Bild von $f|_{]a,b[}$ ist gleich dem Bild von f ohne die Punkte $f(a) = c$ und $f(b) = d$, also gleich $]c,d[$. Die Abbildung $f|_{]a,b[}$ bildet also surjektiv auf $]c,d[$ ab. Da f injektiv ist, ist auch $f|_{]a,b[}$ injektiv. Damit ist auch die Gleichmächtigkeit von $]a,b[$ und $]c,d[$ bewiesen.

- (b) • Bei einer beliebigen Abbildung gibt es für jedes $x \in S$ genau vier verschiedene Möglichkeiten es abzubilden. Da jede Möglichkeit für 1 mit jeder Möglichkeit für 2 kombiniert werden kann, und jede dieser Möglichkeiten wieder mit allen Möglichkeiten für 3 kombiniert werden kann, gibt es insgesamt $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ verschiedene Abbildungen $S \rightarrow T$.

Mit der Formel aus der Vorlesung (vergleiche die Lösung zu (P19) (a)) erhalten wir, dass es $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ injektive Abbildungen gibt. Da S nur drei Elemente enthält und somit das Bild von S maximal drei Elemente enthalten kann, gibt es keine surjektive und damit auch keine bijektive Abbildung von S nach T .

- Wie eben erhalten wir, dass es $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ verschiedene Abbildungen von T nach S gibt.

Injektiv oder bijektiv ist keine davon, da S nur drei Elemente enthält und somit das Bild von T maximal drei Elemente enthalten kann; somit muss es bei jeder Abbildung $T \rightarrow S$ zwei Elemente in T geben, die auf dasselbe Element in S abgebildet werden.

Eine Abbildung $f: T \rightarrow S$ ist genau dann nicht surjektiv, wenn ihr Bild nicht drei Elemente enthält. Wir zählen also die nichtsurjektiven Abbildungen: Es gibt genau 3 Abbildungen von T nach S , deren Bild aus einem Element besteht. Genau zwei Elemente enthalten die Bilder von $3 \cdot (2^4 - 2)$ Abbildungen: Es gibt drei Möglichkeiten, welches Element von S nicht im Bild der Abbildung liegen soll; in jedem dieser drei Fälle haben a, b, c bzw. d jeweils zwei Möglichkeiten abgebildet zu werden, und alle Möglichkeiten für a können mit allen Möglichkeiten für b usw. kombiniert werden - außer jeweils zwei Versionen, bei denen das Bild nur ein Element hätte. Insgesamt gibt es also

$$3^4 - 3 \cdot (2^4 - 2) - 3 = 36$$

surjektive Abbildungen.

- (H24) Sei $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ gleich der Aussage $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Wir zeigen durch Induktion nach n , dass die Aussage, also die Formel, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
Induktionsanfang: Es ist zu zeigen, dass $A(1)$ gilt. Dies bedeutet aber

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6},$$

also $1=1$, was offenbar gilt.

Induktionsannahme: Sei $A(m)$ wahr für ein festes $m \in \mathbb{N}$, es gilt also

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass unter der Induktionsannahme auch $A(m+1)$ gilt: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^2 &= \sum_{k=1}^m k^2 + (m+1)^2 \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\ &= \frac{(m+1)(m(2m+1) + 6(m+1))}{6} \\ &= \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6} \\ &= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} \\ &= \frac{(m+1)(m+2)(2(m+1)+1)}{6}, \end{aligned}$$

wobei wir bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile die Induktionsannahme verwendet haben.

Damit ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

