Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

# Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

## Lösungen Blatt 6.5 WiSe 2010/11 - Curilla/Koch/Ziegenhagen

### Präsenzaufgaben

(P20) (a) Es ist

$$\sum_{\ell=0}^{2} 2^\ell = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7.$$

(b) Wir schreiben zuerst das erste Summenzeichen aus und erhalten

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{k} i = \sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \sum_{i=1}^{3} i = 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 = 10.$$

(c) Einsetzen in die Definition liefert

$$\prod_{i=1}^{3}(5-2i) = (5-2\cdot 1)\cdot(5-2\cdot 2)\cdot(5-2\cdot 3) = 3\cdot 1\cdot(-1) = -3.$$

(P21) Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach $n$:
*Induktionsanfang:* Es ist zu zeigen, dass die Formel für $n = 0$ gilt. Es ist aber

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^{0+1} - 1,$$

die Formel gilt also für $n = 0$.
*Induktionsvoraussetzung:* Sei die Formel wahr für ein beliebiges (aber festes) $m \in \mathbb{N}_0$, es gelte also

$$\sum_{k=1}^{m} 2^k = 2^{m+1} - 1.$$

*Induktionsschluss:* Wir zeigen, dass die Formel unter der Induktionsannahme auch für $m + 1$ gilt: Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} 2^k &= \sum_{k=1}^{m} 2^k + 2^{m+1}\\ &= 2^{m+1} - 1 + 2^{m+1}\\ &= 2\cdot 2^{m+1} - 1\\ &= 2^{m+2} - 1,\end{aligned}$$

wobei wir die Induktionsannahme beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile verwendet haben.
Damit ist die Richtigkeit der Formel für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt.

(P22) Wir suchen die Umkehrfunktion zu $f$, also eine Abbildung $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Gibt es so ein $g$, so ist also insbesondere $y = (f \circ g)(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wir formen diese Aussage um:

$$y = (f \circ g)(y) \Leftrightarrow y = -2(g(y))^5 + 7 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}y + \frac{7}{2} = g(y)^5 \Leftrightarrow g(y) = \sqrt[5]{-\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}}.$$

Bei der letzten Umformung ist es wichtig, sich daran zu erinnern, dass das Ziehen **ungerader** Wurzeln eine Äquivalenzumformung und auch auf negative Werte anwendbar ist!
Definieren wir $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(y) := \sqrt[5]{-\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}}$, so gilt nach obiger Rechnung also $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Wir haben noch zu zeigen, dass auch $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(g \circ f)(x) = \sqrt[5]{-\frac{1}{2}f(x) + \frac{7}{2}} = \sqrt[5]{-\frac{1}{2}(-2x^5 + 7) + \frac{7}{2}} = \sqrt[5]{x^5 - \frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{7}{2}} = \sqrt[5]{x^5} = x.$$

Folglich ist $g$ die gesuchte Umkehrfunktion.

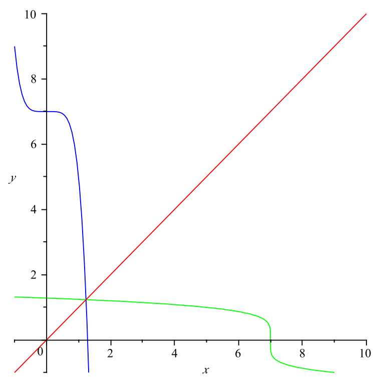


Abbildung 1: Die Graphen von $f, g$ und der ersten Winkelhalbierenden

Zeichnet man die Graphen von $f, g$ und der ersten Winkelhalbierenden, so erhält man Abbildung 1. Man erkennt, dass der Graph der Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden aus dem Graphen von $f$ hervorgeht.
Dies gilt allgemein für jede bijektive Abbildung $f$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}$: Der Graph von $f$ besteht aus den Punkten $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist aber von der Form $x = f^{-1}(y)$ für ein eindeutig bestimmtes $y \in \mathbb{R}$. Also ist $(x, f(x)) = (f^{-1}(y), f(f^{-1}(y))) = (f^{-1}(y), y)$. Dies sind aber gerade die Punkte im Graphen der Umkehrabbildung, gespiegelt an der Winkelhalbierenden (die Spiegelung vertauscht die Einträge).

(P23) (a) Ja, es gilt $\sum_{j=1}^{7} 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 7 \cdot 5 = 35$.

(b) Ja, die beiden Summen unterschieden sich nur in der Benennung der Indexvariable.

(c) Die Aussage ist falsch, denn $n$ und $l$ sind beliebige Zahlen, also im Allgemeinen unterschiedlich - zum Beispiel ist $\sum_{k=1}^{1} k = 1 \neq 3 = 1 + 2 = \sum_{k=1}^{2} k$.

(d) Die Aussage ist falsch: $n$ ist zwar beliebig, aber fest gewählt für die gesamte Gleichung, $k$ hingegen ist die Indexvariable, die die Zahlen von 1 bis $n$ durchläuft. Beispielsweise ist $\sum_{k=1}^{2} k = 1 + 2 = 3 \neq 4 = 2 + 2 = \sum_{k=1}^{2} 2$.