Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Blatt 5 WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S. Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P14) Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gegeben durch $z \mapsto \begin{cases} 2z & \text{falls } z \geq 0 \\ -2z-1 & \text{falls } z < 0 \end{cases}$.

(a) Unterscheiden sich $f(1), f(\{1\}), \{f(1)\}$? Beschreiben Sie den Unterschied.

(b) Bestimmen Sie $f(\{2,3,5\})$, $f^{-1}(\{2,3,5\})$ und $f^{-1}(\{0\})$.

(c) Macht der Ausdruck $f(f(-2))$ Sinn?

(d) Was bedeutet die Aussage $f(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$?

(P15) Betrachtet wird die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N} \\ (x,y) &\mapsto x+y\ . \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie das Bild von $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq 3 \wedge y \leq 3\}$ unter f.

(b) Bestimmen Sie das Urbild von $\{5\}$ und $\{1,3\}$ bezüglich f.

(c) Ist f injektiv oder surjektiv?

(P16) Wahr oder falsch?

(a) Bei der Abbildung f aus Aufgabe (P14) hat jede negative ganze Zahl ein Bild.

(b) Bei der Abbildung f aus Aufgabe (P14) hat jede negative ganze Zahl ein Urbild.

Hausaufgaben

(H17) Sei $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wir definieren eine Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ durch

$$(r,s) \sim (u,v) \ :\Longleftrightarrow\ rv = su.$$

(a) Finden Sie ein Beispiel für ein Zahlenpaar (a,b), $a < 0 < b$, mit $(a,b) \sim (3,-7)$. Für welche $c \in \mathbb{Z}^*$ ist $(c,2) \sim (18,c)$? Gilt für Ihr Beispiel $(a,b) \sim (c,14)$? (1 Punkt)

(b) Beweisen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. (3 Punkte)

(c) Zu jeder Äquivalenzrelation gehört bekanntlich eine Partition. Gesucht sind alle Elemente der Klasse, in der $(2,3)$ liegt. In wieviel verschiedenen Klassen liegen $(1,5), (1,-5), (-1,5), (-1,-5)$? (2 Punkte)

(d) (2 Bonuspunkte) Können Sie jeder Äquivalenzklasse von $\sim$ in eindeutiger Weise eine rationale Zahl zuordnen?

(6 Punkte)

(H18) Gegeben seien eine Abbildung $f : A \to B$ und $A_1, A_2 \subseteq A$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ ist. (2 Punkte)

(b) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass nicht notwendig

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

gilt. (2 Punkte)

(4 Punkte)

(H19) Betrachtet wird die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1 \ . \end{aligned}$$

Skizzieren Sie (in (a)) bzw. bestimmen Sie

(a) den Graphen von f. (1 Punkt)

(b) $f(2)$, $f(\{1, 4, 5, -3\})$ und $f(\{-4, 0, 4\})$. (1 Punkt)

(c) $f(\{2\} \cup \{1, 4, 5, -3\})$. (1 Punkt)

(d) $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{-3\})$ und $f^{-1}(\{-8, 8, 15\})$. (1 Punkt)

(4 Punkte)

(H20) Betrachtet wird die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \ . \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion, also die Menge

$$\{((x, y), f(x, y)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

als eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. (1 Punkt)

(b) Berechnen Sie für eine beliebige reelle Zahl $c \geq 0$ das Urbild von $\{c\}$ und skizzieren Sie es für $c = 9$. (1 Punkt)

(c) Berechnen Sie das Bild von $\{(u, u) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq u \leq 2\}$ unter f. (1 Punkt)

(d) Skizzieren Sie $f(\{(u, u) \in \mathbb{R}^2 : u \in \mathbb{R}\})$. (1 Punkt)

(e) Beweisen oder widerlegen Sie: f ist surjektiv. (2 Punkte)

(6 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 22. November 2010** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.