Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Lösungen Blatt 5 WiSe 2010/11 - Curilla/Koch/Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P14) (a) $f(1)$ ist das Bild von $1 \in \mathbb{Z}$ unter f, also ein Element des Bildbereichs von f. Hingegen ist $f(\{1\})$ das Bild einer Teilmenge des Definitionsbereichs von f, also eine Teilmenge des Bildbereichs. Schließlich ist $\{f(1)\}$ die Menge, die das Bild des Elementes $1 \in \mathbb{Z}$ unter f enthält. Nach Definition von $f(M)$ für eine Teilmenge M des Definitionsbereiches ist $f(\{1\}) = \{f(1)\}$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} f(\{2,3,5\}) &= \{f(2), f(3), f(5)\} = \{4, 6, 10\}, \\ f^{-1}(\{2,3,5\}) &= \{x \in \mathbb{Z} : f(x) \in \{2,3,5\}\} = \{-3, -2, 1\}, \\ f^{-1}(\{0\}) &= \{x \in \mathbb{Z} : f(x) \in \{0\}\} = \{0\}. \end{aligned}$$

(c) Der Ausdruck $f(f(-2))$ macht Sinn, da $f(-2)$ in $\mathbb{Z}$ liegt, f sich also erneut auf die Zahl $f(-2)$ anwenden lässt. Es ist

$$f(f(-2)) = f(3) = 6.$$

(d) Die Aussage $f(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$ bedeutet, dass die Bildmenge $f(\mathbb{Z})$ (also die Menge der Zahlen in $\mathbb{Z}$, die tatsächlich als Bild von f auftreten) nicht mit dem Bildbereich $\mathbb{Z}$ übereinstimmt.
Diese Aussage ist wahr: Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ ist $f(z) \geq 0$, negative Zahlen liegen also nicht in der Bildmenge von f. Man kann sich überlegen, dass andererseits jede nichtnegative ganze Zahl als Bild auftritt, es ist also $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$.

(P15) (a) Es gilt

$$\begin{aligned} & f\left(\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq 3 \wedge y \leq 3\}\right) \\ = \; & f\left(\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),\ldots,(3,3)\}\right) \\ = \; & \{2,3,4,5,6\} \; . \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{5\}) &= \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \quad \text{und} \\ f^{-1}(\{1,3\}) &= f^{-1}(\{3\}) = \{(1,2),(2,1)\} \; . \end{aligned}$$

Die den vier Elementen aus $f^{-1}(\{5\})$ entsprechenden Kugeln sind hier schwarz eingefärbt und ergeben sich als Schnitt der Ebene aller Punktes des $\mathbb{R}^3$ mit „Höhe“ fünf (gelb dargestellt) mit der Skizze von f.

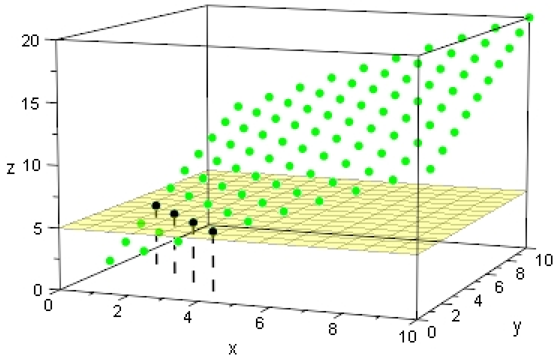


Abbildung 1: Das Bild von f als Teilmenge des $\mathbb{N}^3$.

(c) f ist nicht injektiv, es gilt z.B. $f((3,4)) = 7 = f((2,5))$.
f ist auch nicht surjektiv: Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ ist wegen $x, y \geq 1$

$$f(x,y) = x + y \geq 1 + 1 = 2,$$

also liegt $1 \in \mathbb{N}$ nicht im Wertebereich von f.

(P16) (a) Ja, jede negative ganze Zahl hat ein Bild unter f: Nach Definition einer Abbildung ordnet f jedem Element des Definitionsbereichs einen Bildpunkt zu. Da die Menge aller negativen ganzen Zahlen im Definitionsbereich von f enthalten ist, hat jede negative ganze Zahl z das Bild $f(z)$ unter f.

(b) Nein, nicht jede negative ganze Zahl besitzt ein Urbild: Wie bereits bei der Lösung zu (P14) erläutert ist $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0$, es gilt also für jede negative ganze Zahl z, dass kein Element aus dem Definitionsbereich auf z abgebildet wird.

Hausaufgaben

(H17) (a) Die Bedingung $(a, b) \sim (3, -7)$ bedeutet $3b = -7a$. Ein mögliches Beispiel wäre also $(a, b) = (-3, 7)$.
Die Bedingung $(c, 2) \sim (18, c)$ ist äquivalent zu $c^2 = 36$, also ist c gleich 6 oder -6.
Für $(a, b) = (3, -7)$ ist die Bedingung $(a, b) \sim (c, 14)$ gleichbedeutend mit $42 = -7c$, dies ist für $c = -6$ erfüllt.

(b)
- Zur Reflexivität: Wegen $rs = sr$ ist $(r, s) \sim (r, s)$ für alle $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, also ist $\sim$ reflexiv.
- Zur Symmetrie: Gilt $(r, s) \sim (u, v)$, also $rv = su$, so gilt offensichtlich auch $su = rv$, also $(u, v) \sim (r, s)$, die Relation $\sim$ ist symmetrisch.
- Zur Transitivität: Sei $(r, s) \sim (u, v)$ und $(u, v) \sim (x, y)$ für gegebene $r, u, x \in Z,\ s, v, y \in \mathbb{Z}^*$. Es ist also

$$rv = su \qquad \text{und} \qquad uy = vx.$$

Multiplikation der linken Gleichung mit y liefert $rvy = suy$, setzen wir die rechte Gleichung in suy ein und formen um, so erhalten wir

$$v(ry - sx) = 0.$$

Da $v \in \mathbb{Z}^*$ ist, also insbesondere $v \neq 0$ gilt, muss $ry = sx$ gelten, also $(r, s) \sim (x, y)$.

(c) Die Äquivalenzklasse von $(2, 3)$ ist die Menge

$$\{(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : 3r = 2s\} = \{(2u, 3u) \mid u \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Es ist $(1, 5) \sim (-1, -5)$ und $(-1, 5) \sim (1, -5)$, aber nicht $(1, 5) \sim (-1, 5)$. Da jedes $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ in genau einer Äquivalenzklasse liegt, sind die aufgeführten Elemente in zwei Äquivalenzklassen enthalten.

(d) Sei $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ und $[(a, b)]$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Wir definieren eine Abbildung f von der Menge $\{[(a, b)] : (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$ der Äquivalenzklassen nach $\mathbb{Q}$ durch

$$[(a, b)] \mapsto \frac{a}{b}.$$

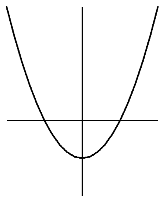
Dies definiert tatsächlich eine Abbildung (man sagt auch: f ist „wohldefiniert“), denn für $(u, v) \sim (a, b)$ gilt $\frac{u}{v} = \frac{a}{b}$, das Bild einer Äquivalenzklasse unter f hängt also nicht davon ab, für welches Element aus der Klasse man den Bruch bildet.

Bemerkung: Diese Abbildung ist sogar bijektiv.

(H18) (a) Sei $y \in f(A_1 \cap A_2)$, es existiere also ein $x \in A_1 \cap A_2$ mit $f(x) = y$. Die Bedingung $x \in A_1 \cap A_2$ bedeutet, dass x sowohl in A_1 als auch in A_2 liegt. Folglich liegt $y = f(x)$ sowohl in $f(A_1)$ als auch in $f(A_2)$, also im Durchschnitt $f(A_1) \cap f(A_2)$.

(b) Sei $f\colon \{0,1,2\} \to \{1,2\}$ gegeben durch $f(0) := 1$, $f(1) := 1$, $f(2) := 2$. Setze $A_1 := \{0,2\}$ und $A_2 := \{1,2\}$. Dann gilt offensichtlich $A_1 \cap A_2 = \{2\}$, also $f(A_1 \cap A_2) = \{f(2)\} = \{2\}$.
Andererseits ist $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1,2\} \cap \{1,2\} = \{1,2\}$.

(H19) (a) Skizze:



(b) Es gelten

$$\begin{aligned} f(2) &= 4-1=3, \\ f(\{1,4,5,-3\}) &= \{f(1), f(4), f(5), f(-3)\} = \{0,15,24,8\} \\ \text{und} \quad f(\{-4,0,4\}) &= \{15,-1\} \ . \end{aligned}$$

(c) Es ist $f(\{2\} \cup \{1,4,5,-3\}) = f(\{2,1,4,5,-3\}) = \{3,0,15,24,8\}$. Mit (b) kann man auch alternativ $f(\{2\} \cup \{1,4,5,-3\}) = f(\{2\}) \cup f(\{1,4,5,-3\}) = \{3\} \cup \{0,15,24,8\} = \{3,0,15,24,8\}$ folgern.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = \{-1,1\}\,, \\ f^{-1}(\{-3\}) &= \emptyset \\ \text{und} \quad f^{-1}(\{-8,8,15\}) &= \{-4,-3,3,4\} \ . \end{aligned}$$

(H20) (a) In Abbildung 2 entspricht die rote Fläche der Funktion f, die schwarze Kurve stellt das Bild $f(\{(u,u) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le u \le 2\})$ aus Aufgabenteil (d) dar und die grüne affine Ebene die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^3$ mit „Höhe“ $c = 9$.

Der obere blaue Kreis ist also als Schnitt dieser Ebene mit der roten Fläche die Menge aller Bildpunkte mit „Höhe“ neun. Die Projektion dieses Kreises auf den unteren Kreis, d.h. in den Definitionsbereich, liefert also das gesuchte Urbild aus Aufgabenteil (b): In dem Fall einen Kreis mit Radius drei.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{c\}) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = c - x^2\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left\{\sqrt{c-x^2}, -\sqrt{c-x^2}\right\}\right\} \end{aligned}$$

Eine passende Skizze ist unter (a) zu finden.

(c) Es ist

$$\begin{aligned} f\left(\left\{(u,u) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le u \le 2\right\}\right) &= \{f((u,u)) : -2 \le u \le 2\} \\ &= \left\{2u^2 : -2 \le u \le 2\right\} = \left\{2u^2 : 0 \le u \le 2\right\} = [0,8] \ . \end{aligned}$$

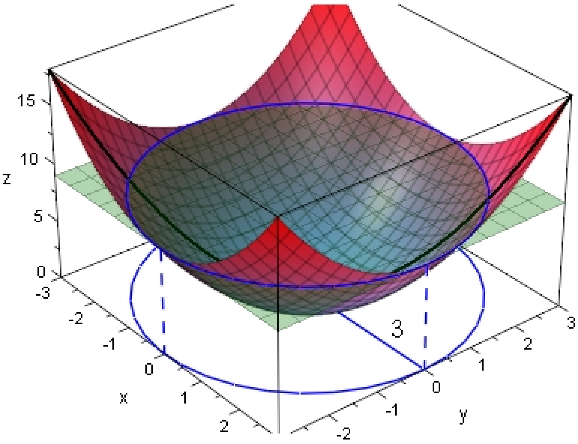


Abbildung 2: Das Bild von f als Quadrik im $\mathbb{R}^3$.

(d) Siehe (a).

(e) f ist nicht surjektiv, da $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : f\left((x, y)\right) = x^2 + y^2 \geq 0$ gilt. Für -4 existiert also beispielsweise kein Urbild.