Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1-V)

Lösungen Blatt 4 WiSe 2010/11 - Curilla/Koch/Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P11) Die Relation R_1 erfüllt $(s), (t), (as)$. Sie ist aber nicht reflexiv, weil zum Beispiel $(u, u) \notin R_1$ ist. Die Relation R_2 ist reflexiv. Sie ist nicht symmetrisch, wegen $(v, w) \notin R_2$. Die Eigenschaften (t) und (as) sind allerdings wieder erfüllt.

(P12) (a) Die Aussage ist wahr. Beweis: Nach Voraussetzung gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = kc$. Damit gilt dann aber auch $-a = (-k)c$, was gleichbedeutend zu $c|(-a)$ ist.

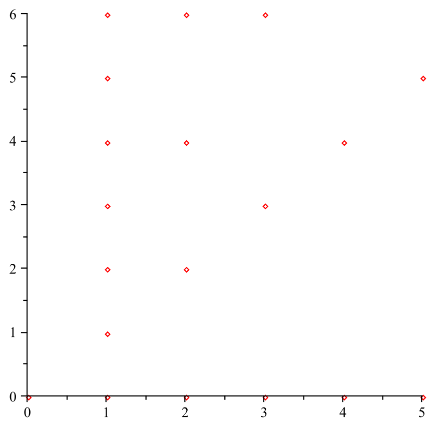
(b) Die Aussage ist ebenfalls korrekt. Beweis: Nach Voraussetzung gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $a = kc$ und $b = lc$. Damit folgt dann aber auch $a + b = kc + lc = (k + l)c$, also $c|(a + b)$.

(c) Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: für $a = 2$ und $b = -2$ gilt offensichtlich die Voraussetzung. Die Folgerung ist aber falsch, weil $2 \neq -2$ ist.

(d) Die Ausage ist wahr. Beweis: Nach Voraussetzung gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $ak = b$ und $bl = c$. Somit folgt aber $c = bl = (ak)l = a(kl)$, also $a|c$.

(e) Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: wir können wieder $a = 2$ und $b = -2$ nehmen. Es gilt $2| - 2$ und $2 \neq -2$. Wenn die Relation antisymmetrisch wäre, dann müsste $-2 \nmid 2$ gelten. Dies ist aber falsch, wegen $(-2) \cdot (-1) = 2$.

(P13) Die Aussage ist falsch. Zwar ist die Relation reflexiv (wegen $a|a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$) und transitiv (wegen (P12) (d)). Die Relation ist aber nicht antisymmetrisch wie wir in (P12) (e) gesehen haben.



Info zur Vorlesung

Mit den Aufgaben P12 d) und e) sowie der Aufgabe H14 können wir die Tabelle aus der Vorlesung vom 8.11.2010 wie folgt ergänzen:

	(r)	(s)	(t)	(as)
Hörsaal-Nachbar	n	j	n	n
$\leq$	j	n	j	j
$\mid$	j	n	j	n
R_m	j	j	j	n

Hierbei steht „n“ für „Nein“ und „j“ für „Ja“.

Hausaufgaben

(H13) (a) Es gilt

$$X \in \text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B) \;\Rightarrow\; X \in \text{Pot}(A) \vee X \in \text{Pot}(B) \;\Rightarrow\; X \subseteq A \vee X \subseteq B$$
$$\Rightarrow\; X \subseteq A \cup B \;\Rightarrow\; X \in \text{Pot}(A \cup B)\ .$$

(b) Seien $A := [1, 2]$ und $B := [4, 6]$. Dann gilt z.B.

$$M := \{2, 4, 5\} \subset A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2 \vee 4 \leq x \leq 6\}\ ,$$

also $M \in \text{Pot}(A \cup B)$, jedoch $M \notin \text{Pot}(A) \cup \text{Pot}(B)$, da M weder eine Teilmenge von A noch eine Teilmenge von B ist:

$$\{2, 4, 5\} \not\subseteq [1, 2] \text{ wegen } 4 \notin [1, 2] \quad \text{und} \quad \{2, 4, 5\} \not\subseteq [4, 6] \text{ wegen } 2 \notin [4, 6]\ .$$

(H14) Wir müssen zeigen, dass die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Weil $m|0$, folgt $m|(a-a)$ und somit $a \equiv a \mod m$. Dies zeigt, dass die Relation reflexiv ist. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b \mod m$, d.h. $m|(b-a)$. Dann gilt mit (P12) (a) auch $m|-(b-a)$, also $m|(a-b)$. Somit folgt $b \equiv a \mod m$ und es ist gezeigt, dass die Relation symmetrisch ist. Für $m|(b-a)$ und $m|(c-b)$ gilt mit (P12) (b)

$$m|(c-b) + (b-a) = (c-a)\,.$$

Es folgt also $a \equiv c \mod m$. Dies zeigt die Transitivität der Relation.

(H15) Folgende Beispiele erfüllen die gewünschten Relationen.

	(r)	(s)	(t)	Beispielsrelation
1.	$+$	$+$	$+$	$\{(u,u),(v,v),(w,w)\}$
2.	$+$	$+$	$-$	$\{(u,u),(v,v),(w,w),(u,v),(v,u),(v,w),(w,v)\}$
3.	$+$	$-$	$+$	$\{(u,u),(v,v),(w,w),(u,v)\}$
4.	$-$	$+$	$+$	$\{(u,u)\}$
5.	$+$	$-$	$-$	$\{(u,u),(v,v),(w,w),(u,v),(v,w)\}$
6.	$-$	$+$	$-$	$\{(u,v),(v,u)\}$
7.	$-$	$-$	$+$	$\{(u,v),(v,w),(u,w)\}$
8.	$-$	$-$	$-$	$\{(u,v),(v,w)\}$

(H16) Gegeben ist die folgende Relation

$$R := \{(a,b) \in M \times M \,|\, \text{es gibt ein } K_i \text{ mit } a,b \in K_i\}\,;$$

(vergleichen Sie auch die Vorlesung oder das Skript von Herrn Kiechle S. 16 unten). Für $(a,b) \in R$ wird kürzer $a \sim b$ geschrieben. Wir müssen zeigen, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist: Für beliebige $a,b \in M$ mit $a \sim b$ gibt es nach Definition ein K_i mit $a,b \in K_i$. Weil dann aber auch $b,a \in K_i$ richtig ist, folgt somit $b \sim a$. Dies liefert uns die Symmetrie. Wir wollen (r) zeigen: Wegen $\bigcup K_i = M$ existiert ein K_i mit $a \in K_i$, also gilt $a \sim a$. Es bleibt zu zeigen, dass die Relation transitiv ist: für beliebige $a,b,c \in M$ sei $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann existieren K_i, K_j mit $a,b \in K_i$ und $b,c \in K_j$. Hieraus folgt $b \in K_i \cap K_j$ und somit $K_i \cap K_j \neq \emptyset$. Weil die K_i eine Partition bilden, muss dann aber $K_i = K_j$ gelten, was wiederum $a \sim c$ impliziert.