Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1-V)

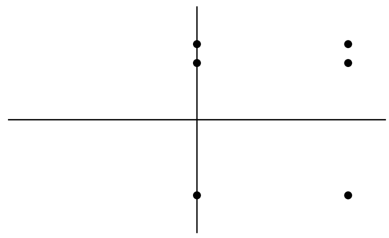
Lösungen Blatt 3 WiSe 2010/11 - Curilla/Koch/Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P8) Wegen $B = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$ und $C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ gilt

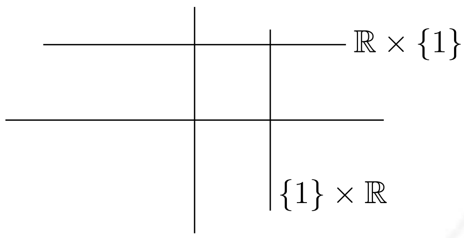
$$\begin{aligned}
&A \cap C = \{7\}\ , \\
&B \cup A = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 9, 10, 13, 16, \ldots\}\ , \\
&C \setminus A = \{2, 3, 5, 11\}\ , \\
&B \setminus C = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 10, 13, 16, \ldots\}\ \text{ und} \\
&C \bigtriangleup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 11\}\ .
\end{aligned}$$

(P9) (a) Mit $M = \{0, 2\} \times \left\{-1, \frac{3}{4}, 1\right\} = \left\{(0,1), (0,-1), \left(0, \frac{3}{4}\right), (2,1), (2,-1), \left(2, \frac{3}{4}\right)\right\}$

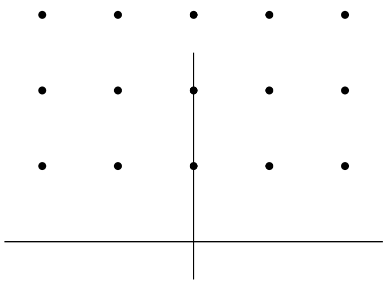


erhalten wir diese Skizze.

(b) Wir erhalten:



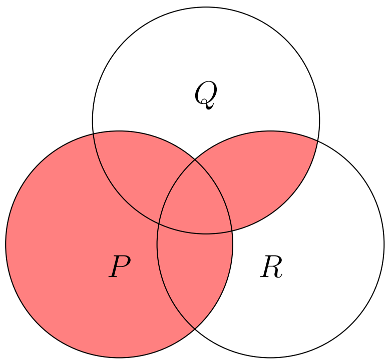
(c) Es ergibt sich:



(d) Wegen $M = \emptyset$ ist nichts einzuzeichnen.

(P10) (a) Machen Sie sich zunächst klar, dass für Aussagen p, q, r die Aussage $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ eine Tautologie ist. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} & x \in P \cup (Q \cap R) \Leftrightarrow x \in P \vee x \in (Q \cap R) \Leftrightarrow x \in P \vee (x \in Q \wedge x \in R) \\ & \quad \Leftrightarrow (x \in P \vee x \in Q) \wedge (x \in P \vee x \in R) \Leftrightarrow x \in (P \cup Q) \wedge x \in (P \cup R) \\ & \quad \Leftrightarrow x \in (P \cup Q) \cap (P \cup R) \ . \end{aligned}$$



Die rote Fläche entspricht der Menge $P \cup (Q \cap R)$.

(b) Durch Umformen erhalten wir

$$\begin{aligned} P \subseteq Q & \Leftrightarrow (\forall x \,:\, x \in P \Rightarrow x \in Q) \Leftrightarrow (\forall x \,:\, x \in P \Rightarrow x \in P \cap Q) \\ & \Leftrightarrow (\forall x \,:\, x \in P \Leftrightarrow x \in P \cap Q) \Leftrightarrow P = P \cap Q \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P \subseteq Q & \Leftrightarrow (\forall x \,:\, x \in P \Rightarrow x \in Q) \Leftrightarrow (\forall x \,:\, x \in P \cup Q \Rightarrow x \in Q) \\ & \Leftrightarrow (\forall x \,:\, x \in P \cup Q \Leftrightarrow x \in Q) \Leftrightarrow P \cup Q = Q \ . \end{aligned}$$

Hausaufgaben

(H9) (a) $A \cap B = \{1, 4, 7\}$ und $B \cap C = \{7\}$.

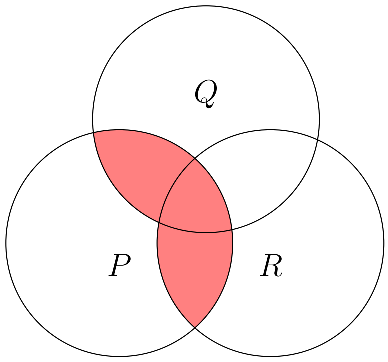
(b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$ und
$B \cup C = \{\dots, -5, -2, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 16, \dots\}$.

(c) $A \setminus B = \{9\}$, $B \setminus A = \{\dots, -5, -2, 10, 13, 16, \dots\}$, $C \setminus B = \{2, 3, 5, 11\}$ und $A \setminus C = \{1, 4, 9\}$.

(d) $A \triangle B = \{\dots, -5, -2, 9, 10, 13, 16, \dots\}$ und
$B \triangle C = \{\dots, -5, -2, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 13, 16, \dots\}$.

(H10) (a) Machen Sie sich zunächst klar, dass für Aussagen p, q, r die Aussage $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ eine Tautologie ist. Damit gilt dann

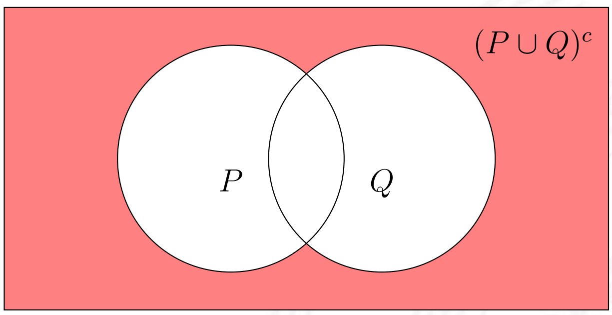
$$x \in P \cap (Q \cup R) \Leftrightarrow x \in P \wedge (x \in Q \vee x \in R)$$
$$\Leftrightarrow (x \in P \wedge x \in Q) \vee (x \in P \wedge x \in R) \Leftrightarrow x \in (P \cap Q) \cup (P \cap R)$$



Die rote Fläche entspricht der Menge $(P \cap Q) \cup (P \cap R)$.

(b)

$$x \in (P \cup Q)^c \Leftrightarrow \neg(x \in P \vee x \in Q) \Leftrightarrow \neg(x \in P) \wedge \neg(x \in Q)$$
$$\Leftrightarrow x \in P^c \wedge x \in Q^c \Leftrightarrow x \in P^c \cap Q^c.$$



Die rote Fläche entspricht der Menge $(P \cup Q)^c$.

(H11) (a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
x \in M \triangle N &\Leftrightarrow x \in (M \setminus N) \cup (N \setminus M) \Leftrightarrow (x \in M \wedge x \notin N) \vee (x \in N \wedge x \notin M) \\
&\Leftrightarrow (x \in M \cup N \wedge x \notin N) \vee (x \in M \cup N \wedge x \notin M) \\
&\Leftrightarrow (x \in M \cup N) \wedge (x \notin M \vee x \notin N) \Leftrightarrow (x \in M \cup N) \wedge (x \notin M \cap N) \\
&\Leftrightarrow x \in (M \cup N) \setminus (M \cap N)\,.
\end{aligned}
$$

(b) $M \triangle N = (M \cup N) \setminus (M \cap N) = (N \cup M) \setminus (N \cap M) = N \triangle M$.

(c) $M \triangle M = (M \cup M) \setminus (M \cap M) = M \setminus M = \emptyset$.

(d) $M \triangle \emptyset = (M \cup \emptyset) \setminus (M \cap \emptyset) = M \setminus \emptyset = M$.

(e) Offensichtlich gilt $M = N \;\Rightarrow\; M \times N = N \times N = N \times M$.
Die andere Richtung beweisen wir mittels der Kontraposition; für $N \neq M$ existiert ohne Einschränkung ein Element $x \in M \setminus N$ (benenne gegebenenfalls die beiden Mengen um), da N nach Voraussetzung ein Element n enthält, existiert also ein Element $(x,n) \in (M \times N)$ mit $(x,n) \notin (N \times M)$, also gilt $(x,n) \in (M \times N) \setminus (N \times M)$ und damit $(M \times N) \neq (N \times M)$.

(f) Es gilt

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in M \times (N \cap P) &\Leftrightarrow (x \in M) \wedge (y \in N \cap P) \\
&\Leftrightarrow (x \in M) \wedge (y \in N \wedge y \in P) \\
&\Leftrightarrow (x \in M \wedge y \in N) \wedge (x \in M \wedge y \in P) \\
&\Leftrightarrow ((x,y) \in M \times N) \wedge ((x,y) \in M \times P) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (M \times N) \cap (M \times P)\,.
\end{aligned}
$$

(H12) (a) Zunächst gilt $N = \left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$, also folgen

$$
\begin{aligned}
M \cup N &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 0 \vee -2 \leq x \leq 3\} = M,\ M^c = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -2 \vee x > 3\}\,, \\
M \cap N^c &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 0 \wedge -2 \leq x \leq 3\} = M \setminus \{0\}\,, \\
M \triangle N &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 0 \vee -2 \leq x \leq 3\} \setminus \{0\} = M \setminus \{0\} \\
\text{und} \quad M \times N &= \{(x,0) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x \leq 3\}\ .
\end{aligned}
$$

(b) Es gelten

$$
\begin{aligned}
M \cup N &= \left]-\sqrt{2}, 25\right],\ M^c =]-\infty, 0[\,\cup\,]25, \infty[\,, \\
M \cap N^c &= [5, 25],\ M \triangle N = \left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup [5, 25] \\
\text{und} \quad M \times N &= \left\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 25 \wedge -\sqrt{2} < y < 5\right\}\ .
\end{aligned}
$$