Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1-V)

Blatt 2 WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S. Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P4) Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von Quantoren in möglichst einfacher Form, verneinen Sie die Aussagen und übersetzen Sie die Verneinungen wieder in vollständige deutsche Sätze.

(a) Es gibt einen Berg, der höher ist als 8800 Meter.

(b) Alle meine Freunde haben einen Computer.

(c) Alle Schüler haben jeden Tag gebadet.

(d) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl n', so dass $n \cdot n' = 1$ gilt. (Ist diese Aussage wahr oder falsch?)

(P5) Überlegen Sie sich ein Beispiel, welches deutlich macht, dass eine Vertauschung der Reihenfolge der Quantoren $\forall$ und $\exists$ eine Aussage inhaltlich verändern kann.

(P6) Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\forall\, z \in \mathbb{Z} \,:\, z^2 \geq 25 \Leftrightarrow z \geq 5$$

(Die Aussage bedeutet: $\forall\, z \in \mathbb{Z} : (\, z^2 \geq 25 \Leftrightarrow z \geq 5)$. Dies soll bitte nicht verwechselt werden mit: $(\forall\, z \in \mathbb{Z} \,:\, z^2 \geq 25) \Leftrightarrow z \geq 5)$.

(P7) Überprüfen Sie bei den Aussagen „n ist eine Primzahl, die größer als 2 ist“ und „n ist eine ungerade natürliche Zahl“, welche notwendig bzw. hinreichend für die andere ist. Formulieren Sie Ihre Ergebnisse in ganzen Sätzen unter Verwendung der Begriffe „notwendig“ bzw. „hinreichend“.

Hausaufgaben

(H5) Verneinen Sie die folgenden Aussagen und untersuchen Sie sie auf ihren Wahrheitsgehalt (mit Begründung!)

(a) $\exists\, x \in \mathbb{R} \,:\, x^3 = -27 \wedge x < 0$ (2 Punkte)

(b) $\forall\, x \in \mathbb{Z} \,: x + 3 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq -2$ (2 Punkte)
(machen Sie in (b) einen kurzen Widerspruchsbeweis.)

(4 Punkte)

(H6) Entscheiden Sie, ob die folgenden Implikationen über ganze Zahlen m und n wahr oder falsch sind. Formulieren Sie auch jeweils die Kontraposition und Umkehrung und untersuchen Sie diese auf ihren Wahrheitswert:

(a) m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade (2 Punkte)

(b) $m^2 + n^2 = 0 \Rightarrow mn = 0$ (2 Punkte)

(c) $m \leq n \Rightarrow m^2 \leq n^2$ (2 Punkte)

(6 Punkte)

(H7) Entscheiden und begründen Sie, ob bei den folgenden Aussagenpaaren p jeweils notwendig bzw. hinreichend für q ist:

(a) Sei p die Aussage „n ist größer als 871“ und q die Aussage „$n \geq 871$“ ($n \in \mathbb{N}$). (1 Punkt)

(b) Sei p die Aussage „n ist gerade “ und q die Aussage „n^3 ist gerade“ ($n \in \mathbb{N}$). (1 Punkt)

(c) Sei p die Aussage „n ist eine ganze Zahl“ und q die Aussage „n ist eine natürliche Zahl“. (1 Punkt)

(d) Sei p die Aussage „$(M \subset N \ \wedge \ N \subset P)$“ und q die Aussage „$M \subset P$“. (1 Punkt)

(4 Punkte)

(H8) Entscheiden Sie für die gegebenen Mengen M und N jeweils, welche der Aussagen $M \subseteq N$, $M \subset N$, $N \subseteq M$,$N \subset M$ und $M = N$ gilt bzw. nicht gilt und begründen Sie Ihre Antworten:

(a) $M := \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 5\}$ und $N := \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x^2 < 24\}$. (1 Punkt)

(b) $M := \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 - 12 < 180\}$ und
$N := \{x \in M \mid x^2 \leq 26 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$. (1 Punkt)

(c) $M := \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 4x^2 + x + 7 = 1\}$ und
$N := \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 - 4x^2 + x + 7 = 1\}$. (2 Punkte)

(d) $M := \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - 1 = 2\right\}$ und
$N := \{y \in \mathbb{N} \mid y^2 = 3y - 2\}$. (2 Punkte)

(6 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 1. November 2010** in die dafür vorgesehenen Ordner in der letzten Tischreihe erfolgen.