Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1-V)

Lösungen Blatt 2 WiSe 2010/11 - Curilla/Koch/Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P4) (a) Sei B die Menge der Berge. Weiter sei für $b \in B$ die Aussage „Der Berg b ist höher als 8800 Meter“ mit $h(b)$ bezeichnet. Die Aussage in (a) wird dann als $\exists b \in B : h(b)$ geschrieben. Die Negation hiervon ist $\forall b \in B : \neg h(b)$ und bezeichnet die Aussage „Alle Berge sind kleiner oder gleich 8800 Meter“.

(b) Sei F die Menge meiner Freunde, und für $f \in F$ sei $c(f)$ die Aussage „Mein Freund f hat einen Computer“. Dann schreibt sich „Alle meine Freunde haben einen Computer“ als $\forall f \in F : c(f)$. Die Negation ist $\exists f \in F : \neg c(f)$ und meint die Aussage „Ich habe einen Freund, der keinen Computer hat“.

(c) S sei die Menge aller Schüler, T die Menge aller betrachteten Tage und $b(s,t)$ die Aussage, dass der Schüler s am Tag t gebadet habe. „Alle Schüler haben jeden Tag gebadet“ entspricht dann $\forall\, s \in S\, \forall\, t \in T : b(s,t)$

„Es gibt einen Schüler, der an einem Tag nicht gebadet hat“ entspricht $\exists\, s \in S, \exists\, t \in T : \neg b(s,t)$

(d) „Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl n', so dass $n \cdot n' = 1$ gilt“ wird mit Quantoren geschrieben als $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, n' \in \mathbb{N} : n \cdot n' = 1$
(Die Aussage ist falsch, z.B. für $n = 2$ gilt $n \cdot n' = 2 \cdot n' \geq 2\ \forall\, n' \in \mathbb{N}$.)
„Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass für jede natürliche Zahl n' dann $n \cdot n' \neq 1$ gilt“ ist die Negation hiervon und wird geschrieben als

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, n' \in \mathbb{N} : n \cdot n' \neq 1.$$

(P5) Sei T die Menge der Töpfe und D die Menge der Deckel. Für $t \in T$ und $d \in D$ bezeichne $p(t,d)$ die Aussage „Der Deckel d passt auf den Topf t“. Dann bezeichnet $\forall t \in T\, \exists d \in D : p(t,d)$ die Aussage „Für jeden Topf gibt es einen Deckel, der auf ihn passt“. Im Gegensatz hierzu bezeichnet $\exists t \in T\, \forall d \in D : p(t,d)$ die Aussage „Es gibt einen Topf, auf den jeder Deckel passt“.

(P6) $z^2 \geq 25 \Leftrightarrow z \geq 5$ gilt nicht für alle $z \in \mathbb{Z}$, z.B. ist für $z = -6$ die Aussage $36 = z^2 > 25$ wahr, $-6 = z > 5$ jedoch falsch.

(P7) Sicherlich ist eine Primzahl, die größer ist als 2, eine ungerade natürliche Zahl. Die Umkehrung ist aber falsch (man nehme als Beispiel $n = 9$). Es gilt also „n ist eine Primzahl, die größer ist als 2, ist hinreichend dafür, dass n ungerade ist“. Anders formuliert: „Notwendig dafür, dass n eine Primzahl ist, die größer ist als 2, ist, dass n ungerade ist.“

Hausaufgaben

(H5) (a) $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^3 = -27 \wedge x < 0$: Die Aussage ist wahr, denn mit $x := -3$ existiert eine reelle Zahl, die $x^3 = -27$ erfüllt und negativ ist.
Die Verneinung lautet $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^3 \neq -27 \vee x \geq 0$.

(b) Die Verneinung von $\forall\, x \in \mathbb{Z} : x + 3 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq -2$ lautet

$$\exists\, x \in \mathbb{Z} : x + 3 \in \mathbb{N} \wedge x < -2\ .$$

(Hierbei wurde benutzt, dass $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.) Die ursprüngliche Aussage ist wahr:
Nehmen wir an $x \geq -2$ ist falsch für ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x + 3 \in \mathbb{N}$, es gelte also $x \leq -3$. Dann folgt durch Addieren direkt $x + 3 \leq -3 + 3 = 0$, also $\neg\,(x + 3 \in \mathbb{N})$. Das widerspricht der Voraussetzung.

(H6) (a) „m^2 gerade $\Rightarrow$ m gerade" ist eine wahre Aussage, da die Kontraposition „m ungerade $\Rightarrow$ m^2 ungerade" wahr ist:

$$\begin{aligned} m \in 2\mathbb{Z} + 1 := \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} &\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} : m = 2n + 1 \\ \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 &= 2\underbrace{(2n^2 + 2n)}_{\in \mathbb{Z}} + 1 \\ \Rightarrow m^2 \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{aligned}$$

Die Umkehrung „m gerade $\Rightarrow$ m^2 gerade" ist auch wahr:

$$m \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow (\exists\, n \in \mathbb{Z} : m = 2n) \Rightarrow m^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2) \in 2\mathbb{Z}\ .$$

(b) $m^2 + n^2 = 0 \Rightarrow mn = 0$ ist eine wahre Aussage:

$$\underbrace{m^2}_{\geq 0} + \underbrace{n^2}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \wedge n^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \wedge n = 0 \Rightarrow mn = 0\,.$$

Damit ist natürlich auch die Kontraposition

$$mn \neq 0 \Rightarrow m^2 + n^2 \neq 0$$

eine wahre Aussage.
Die Umkehrung $mn = 0 \Rightarrow m^2 + n^2 = 0$ stimmt aber nicht, z.B. ist für $m = 0$ und $n = 2$ die Aussage $0 \cdot 2 = mn = 0$ wahr, die Aussage $4 = 0^2 + 2^2 = m^2 + n^2 = 0$ aber falsch.

(c) $m \leq n \Rightarrow m^2 \leq n^2$ ist falsch, denn für $m = -3$ und $n = 0$ ist zwar $-3 = m \leq n = 0$ wahr, jedoch $9 = m^2 \leq n^2 = 0$ falsch.
Damit ist auch die Kontraposition $m^2 > n^2 \Rightarrow m > n$ falsch.
Die Umkehrung $m^2 \leq n^2 \Rightarrow m \leq n$ ist ebenfalls falsch: Für $m = 0$ und $n = -2$ ist $0 = m^2 \leq n^2 = 4$ wahr, $0 = m \leq n = -2$ jedoch falsch.

(H7) (a) Aussage p ist offensichtlich wegen $n > 871 \Leftrightarrow n \geq 872$ hinreichend, jedoch nicht notwendig, da $n = 871$ nicht p, jedoch die Aussage q erfüllt.

(b) Die Aussage p ist hinreichend: $n = 2k \in 2\mathbb{N}$ impliziert nämlich $n^3 = 8k^3 = 2\,(4k^3) \in 2\mathbb{N}$.
p ist auch notwendig, da $n = 2k-1 \in (2\mathbb{N}-1)$ entsprechend $n^3 = (2k-1)^3 = 8k^3 - 4k^2 + 2k - 1 = 2\,(4k^3 - 2k^2 + k) - 1 \in (2\mathbb{N}-1)$ impliziert.

(c) Die Aussage p ist wegen $-3 \in \mathbb{Z}$ und $-3 \notin \mathbb{N}$ nicht hinreichend, wegen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ jedoch notwendig.

(d) Aussage p ist nicht notwendig: Für $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{N}$ und $P = \mathbb{Q}$ gilt offenbar $M \subset P$, jedoch nicht $M \subset N$.
Nach Aufgabe (P3) ist die Aussage jedoch hinreichend.

(H8) (a) Wegen $M = \{2,3,4\}$ und $N = \{2,3,4,-2,-3,-4\}$ gilt $M \subseteq N$ und $M \subset N$, die anderen Aussagen gelten nicht.

(b) Wegen $M = \{1,2,3,4,5\}$ und $N = \{1,2,3,4,5\}$ gilt $M = N, N \subseteq M$ und $M \subseteq N$. Die echten Inklusionen gelten nicht.

(c) Wegen $M = \{-1,2,3\}$ und $N = \{2,3\}$ gilt $N \subseteq M$ und $N \subset M$, die anderen Aussagen gelten nicht.

(d) Wegen $M = \{1,2\}$ und $N = \{1,2\}$ gilt $M = N, N \subseteq M$ und $M \subseteq N$. Die anderen beiden Aussagen gelten nicht.