Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1-V)

Lösungen Blatt 1 WiSe 2010/11 - Curilla/Koch/Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P1) (a) $p \Rightarrow q$

(b) $\neg q \Rightarrow \neg p$

(P2) Wahrheitstafel der Tautologie $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
w	w	f	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	w	f	w
f	w	w	f	f	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w	w

(P3) Wahrheitstafel der Tautologie $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Hausaufgaben

(H1) (a)

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	f	f	w
f	f	f	f	w

(b)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	w	w	w
f	f	f	f	w

(c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p \Leftrightarrow \neg q$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

(d) Wahrheitstafel zu $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$:

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

(e) Nach (d) gilt $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$. Nach (c) und (P2) gilt dann $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$. Also ist (mit (P3)) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.

(H2) (a) Wahrheitstafel zu $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

(b) $p =$ „Eimsbüttel hat mindestens 10.000 Einwohner“
$q =$ „Hamburg hat mindestens 10.000 Einwohner“
$p \Rightarrow q =$ „Falls Eimsbüttel mindestens 10.000 Einwohner hat, so auch Hamburg“
$\neg q \Rightarrow \neg p =$ „Falls Hamburg weniger als 10.000 Einwohner hat, so hat auch Eimsbüttel weniger als 10.000 Einwohner“

(H3) (a) Die Aussage $g(n) \wedge u(n)$ ist für alle natürlichen Zahlen n falsch, weil n niemals gerade und ungerade sein kann.

(b) Die Aussage $\neg u(n) \wedge p(n)$ ist nur für $n = 2$ wahr, denn 2 ist die einzige Primzahl die nicht ungerade ist.

(c) Die Aussage $(g(n) \wedge p(n)) \Rightarrow u(n)$ ist für alle n außer der 2 wahr: Weil jede Implikation, die von einer falschen Voraussetzung ausgeht, immer wahr ist, und $(g(n) \wedge p(n))$ für alle n außer 2 falsch ist, ist $(g(n) \wedge p(n)) \Rightarrow u(n)$ wahr für alle $n \neq 2$. Für $n = 2$ ist $(g(2) \wedge p(2))$ wahr und $u(2)$ falsch. Somit folgt, dass $(g(2) \wedge p(2)) \Rightarrow u(2)$ falsch ist.

(d) Die Aussage $(u(n) \vee p(n)) \Rightarrow p(n)$ ist für alle geraden natürlichen Zahlen und alle ungeraden Primzahlen wahr: Weil $(u(n) \vee p(n))$ für alle geraden Zahlen (außer der 2) falsch ist, ist die Aussage $(u(n) \vee p(n)) \Rightarrow p(n)$ für alle geraden Zahlen (außer der 2) wahr (siehe (c)). Für $n = 2$ ist die Aussage aber auch wahr, weil $(u(2) \vee p(2))$ und $p(2)$ wahr sind. Für n ungerade ist $(u(n) \vee p(n))$ wahr, aber $p(n)$ nur wahr, wenn n zusätzlich eine Primzahl ist. Wenn n ungerade ist, ist $(u(n) \vee p(n)) \Rightarrow p(n)$ also nur wahr, wenn n auch eine Primzahl ist.

(e) Die Aussage ist für alle n wahr: ist $n \neq 2$, so ist $n = 2$ und $(g(n) \wedge p(n))$ falsch. Somit ist $(g(n) \wedge p(n)) \Leftrightarrow (n = 2)$ wahr. Ist $n = 2$, so ist $n = 2$ und $(g(n) \wedge p(n))$ wahr. Somit ist ebenfalls $(g(n) \wedge p(n)) \Leftrightarrow (n = 2)$ wahr.

(H4) (a) Wenn der Hahn schreit, dann geht die Sonne auf.

(b) Wenn die Sonne nicht aufgeht und der Hahn schreit, dann geht es dem Bauern nicht gut.

(c) Wenn der Hahn schreit, dann geht die Sonne auf und dem Bauern geht es gut oder die Sonne geht nicht auf und dem Bauern geht es nicht gut.