Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Blatt 12 WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S. Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P37) Ein Hotel für MathematiklehrerInnen hat genau $\mathbb{N}$ Zimmer (d.h. abzählbar unendlich viele). Das Hotel ist bereits voll belegt, als ein weiterer Mathematiklehrer eintrifft. Da alle Gäste sich nach Belieben innerhalb des Hotels umquartieren lassen, kann der neue Gast ebenfalls untergebracht werden. Wie ist dies möglich?

(P38) Welche der folgenden Mengen sind gleichmächtig zueinander?

(a) $]0,1[$,
(b) $\{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
(c) $]0,2[$,
(d) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
(e) $\mathbb{Q}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
(f) $\left]\frac{1}{n}, 1\right[$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Hausaufgaben

(H46) Sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass die Relation

$$M \sim N :\Leftrightarrow |M| = |N| \qquad \text{für } M, N \subseteq X$$

eine Äquivalenzrelation auf der Potenzmenge von X definiert. **(4 Punkte)**

(H47) Hilberts Hotel aus Aufgabe (P37) bekommt weitere Gäste. Ist eine Unterbringung möglich (mit Beweis), falls

(a) eine Reisegruppe bestehend aus n MathematiklehrerInnen Unterkunft sucht? Hierbei sei n eine natürliche Zahl. (3 Punkte)
(b) ein Großraumbus mit $\mathbb{N}$ Personen ankommt? (3 Punkte)

(6 Punkte)

(H48) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. **(6 Punkte)**

(H49) Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_1 := 3$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Universität Hamburg
Christian Curilla · Geom. 332 ·Tel. (040) 42838-5193

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n^2 \geq 5$. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Folge *monoton fällt*, also dass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1} .$$

Hinweis: Benutzen Sie Aussage (a) selbst wenn Sie diese nicht bewiesen haben sollten. Außerdem dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (2 Punkte)

(c) Geben Sie eine Vermutung ab, welchem Wert sich die Folge beliebig dicht nähert. (1 Bonuspunkt)

(4 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 31. Januar 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.