Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Lösungen Blatt 12 WiSe 2010/11 - Curilla/Koch/Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P37) Dass das Hotel abzählbar unendlich viele Zimmer hat, heißt, dass wir jedem Zimmer genau eine natürliche Zahl als Zimmernummer zuweisen können. Es gibt also ein Zimmer 1, ein Zimmer 2, ein Zimmer 3 usw. - wie in den meisten anderen Hotels auch, nur gibt es hier für *jede* erdenkliche natürliche Zahl ein Zimmer mit dieser Zimmernummer. Das Hotel ist voll belegt, in jedem Zimmer ist also eine Person einquartiert. Um den neu eingetroffenen Gast auch noch unterzubringen, hängen wir einen großen Zettel in die Hotellobby, auf dem wir unsere Gäste bitten, jeweils ein Zimmer weiter zu ziehen. Die Person aus Zimmer 1 zieht also nach Zimmer 2, die Person in Zimmer Nummer 2 zieht in Zimmer 3, der Gast aus Zimmer 3 zieht in Zimmer 4, und so weiter. Da es abzählbar unendlich viele Zimmer gibt, findet so jeder Gast ein neues Zimmer (es gibt also keinen „letzten“ Gast, für den es kein Zimmer mehr gibt). Das Zimmer mit der Nummer 1 ist nun leer, dort quartieren wir den neu angekommenen Lehrer ein.
Etwas mathematischer formuliert haben wir folgende Situation vorliegen: Sei G die Menge der alten Gäste. Dass jeder Gast sein eigenes Zimmer hat, bedeutet mathematisch, dass wir eine injektive Abbildung $\iota : G \to \mathbb{N}$ haben (hierbei wird jeder Gast auf seine Zimmernummer abgebildet). Dass das Hotel voll belegt ist bedeutet nun weiter, dass diese Abbildung sogar surjektiv ist. Insgesamt erhalten wir somit eine bijektive Abbildung, was wiederum die Gleichmächtigkeit von G zu $\mathbb{N}$ zeigt. G ist also abzählbar. Mittels der Umkehrabbildung ι^{-1} können wir uns dann auch G durchnummeriert vorstellen: für den Gast im i-ten Zimmer schreiben wir einfach $g_i := \iota^{-1}(i)$.Wenn wir nun begründen wollen, dass das Hotel immer noch voll belegt ist und jeder Gast sein eigenes Zimmer hat, wenn wir noch einen weiteren Gast h hinzunehmen, dann müssen wir zeigen, dass es eine bijektive Abbildung $f : G \cup \{h\} \to \mathbb{N}$ gibt (wir ordnen jedem Gast also wieder eine Zimmernummer zu). Diese Bijektion erhalten wir nun zum Beispiel indem wir $f(h) := 1$ und $f(g_i) := i+1$ für $i \in \mathbb{N}$ setzen (dies entspricht genau dem Umquartieren wie es oben beschrieben ist).

(P38) Zunächst stellen wir fest, dass die Menge aus (b) die einzige endliche Menge in der Aufgabe ist. Sie ist also zu keiner der anderen Menge gleichmächtig.
Die Mengen (a),(c) und (f) sind gleichmächtig: Eine Bijektion f von $]0,1[$ nach $]0,2[$ ist durch $x \mapsto 2x$ gegeben, in die andere Richtung durch die Umkehrabbildung $x \mapsto \frac{1}{2}x$. Eine Bijektion g von $]0,1[$ nach $\left]\frac{1}{n},1\right[$ finden wir, indem wir $]0,1[$ zuerst auf die richtige Länge stauchen und dann verschieben: Wir definieren g durch $g(x) := \frac{n-1}{n} \cdot x + \frac{1}{n}$. Die Umkehrabbildung g^{-1} liefert wieder die Bijektion in die andere Richtung. Verketten wir f und g^{-1} zu $f \circ g^{-1}$, so erhalten wir eine Bijektion von $\left]\frac{1}{n},1\right[$ nach $]0,2[$, verketten wir hingegen g und f^{-1}, so liefert dies eine Bijektion

von $]0,2[$ nach $]\frac{1}{n},1[$.
Die Mengen aus (d) und (e) sind ebenfalls gleichmächtig zueinander: In der Vorlesung kam die Bemerkung, dass $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist, dass es also eine Bijektion h von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}^n$ gibt. Setzen wir $i : \mathbb{N} \to \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\}$, $k \mapsto \frac{1}{k}$, so ist i eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in die Menge aus (d). Damit ist aber $i \circ h^{-1}$ eine Bijektion von $\mathbb{Q}^n$ auf die Menge aus (d), und $h \circ i^{-1}$ eine Bijektion in die andere Richtung, also sind die Mengen gleichmächtig.
Zuletzt bleibt noch festzuhalten, dass keine der Mengen aus (a),(c),(f) gleichmächtig zu der Menge aus (d) oder (e) ist: Die Menge (a) ist überabzählbar nach Satz 8.10 der Vorlesung (siehe den Beweis von 6.16 aus dem Kiechle-Skript), also auch die Mengen (c) und (f). Gäbe es eine Bijektion a von einer der Mengen aus (a),(c),(f) in die Mengen aus (d) oder (e), so wäre $a^{-1} \circ h$ bzw. $a^{-1} \circ i$ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach (a),(c),(f), im Widerspruch zur Überabzählbarkeit dieser Mengen. Analog gilt: Gäbe es eine Bijektion b von einer der Mengen aus (d) oder (e) auf eine der Mengen aus (a),(c),(f), so wäre $b \circ h$ bzw. $b \circ i$ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach (a),(c),(f), was wiederum ein Widerspruch ist.
Insgesamt ergeben sich also drei verschiedene Klassen von Mächtigkeit: Einerseits (b), zweitens (a),(c) und (f), und drittens (d) und (e).

Hausaufgaben

(H46) Wir müssen zeigen, dass $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist:
Reflexivität: Sei $M \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge von X. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_M \colon M \to M$, $m \mapsto m$ ist eine Bijektion von M nach M, also gilt $|M| = |M|$.
Symmetrie: Seien $M, N \subseteq X$ mit $|M| = |N|$. Es gibt also eine Bijektion $f \colon M \to N$. Hieraus folgt weiter, dass es eine Umkehrabbildung $f^{-1} \colon N \to M$ gibt. Diese ist ebenfalls bijektiv und es folgt somit $|N| = |M|$.
Transitivität: Seien $M, N, P \subseteq X$ mit $|M| = |N|$ und $|N| = |P|$. Es gibt folglich zwei bijektive Abbildungen $f \colon M \to N$ und $g \colon N \to P$. Nach (H21) von Übungsblatt 6 ist dann auch die Verkettung $g \circ f \colon M \to P$ bijektiv. Also gilt auch $|M| = |P|$.

(H47) (a) Ja, dies ist möglich: Wir gehen hier vor wie in (P37), nur bitten wir die LehrerInnen, jeweils n Zimmer weiter zu ziehen. Die Person aus Zimmer 1 zieht also nach $n+1$, die aus 2 zieht nach $n+2$,..., die aus n zieht nach $2n$, die aus $n+1$ zieht nach $2n+1$ usw. Somit werden die ersten n Zimmer frei.
Mathematisch formuliert bedeutet dieser Sachverhalt: Wenn wir eine abzählbar unendliche Menge mit endlich vielen Elementen vereinigen, dann ist die neu erhaltene Menge immer noch abzählbar. Sei etwa $G := \{g_i : i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der alten Gäste (hierbei bezeichne g_i wieder den Gast im i-ten Zimmer) und $H := \{h_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ die Menge der neuen Gäste (diese haben wir einfach mit den Zahlen von 1 bis n durchnummeriert), dann können wir eine Bijektion $f : G \cup H \to \mathbb{N}$ konstruieren, indem wir $f(g_i) := i + n$ und $f(h_i) := i$ setzen. Dies entspricht oben beschriebener Umquatierung. Als mathematische Folgerung erhalten wir $|G \cup H| = |\mathbb{N}|$.

(b) Auch dies ist möglich. Auf unserem Aushang bitten wir unsere bisherigen Gästen nun, dass sie in das Zimmer ziehen, dessen Nummer das doppelte ihrer bisherigen Zimmernummer ist (da unsere Gäste nur aus MathematiklehrerInnen bestehen, können alle problemlos ihre neue Zimmernummer berechnen). Der Gast aus Zimmer 1 zieht also nach Zimmer 2, der Gast aus 2 zieht nach Zimmer 4, der Gast aus 3 nach Zimmer 6 etc. Auf diese Weise werden alle Zimmer mit ungeraden Nummern frei. Wir quartieren nun die Person, die als erstes aus dem Bus steigt, in Zimmer 1 ein, die zweite Person in Zimmer 3, die dritte in Zimmer 5, und so weiter. So kommen alle bei uns unter.
Mathematisch formuliert: Sei $G := \{g_i : i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der alten Gäste und $H := \{h_i : i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der neuen Gäste (vgl. Lösung zu (a)). Dann gilt $|G \cup H| = |\mathbb{N}|$. Um dies zu zeigen, müssen wir also eine Bijektion zwischen $G \cup H$ und $\mathbb{N}$ angeben. Die oben sprachlich formulierte Abbildung entspricht gerade $f : G \cup H \to \mathbb{N}$, wobei wir $f(g_i) := 2i$ und $f(h_i) := 2i - 1$ gesetzt haben. Dies ist ein Beispiel dafür, dass wenn man zwei abzählbar unendliche Mengen vereinigt, die resultierende Menge immer noch abzählbar unendlich ist.

(H48) Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie endlich ist oder die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ hat. Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist offenbar nicht endlich. Wir konstruieren also eine Bijektion f von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und nutzen dabei ein Diagonalverfahren, wie man es auch benutzt, um zu zeigen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Dazu stellen wir uns die Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als in die Ebene $\mathbb{R}^2$ eingezeichnet vor und nummerieren diese wie weiter unten dargestellt durch: Das erste Element ist das Element links unten, das zweite ist das Element darüber, das dritte das diagonal rechts darunter. Danach gehen wir einen Schritt nach rechts und dann diagonal nach links oben, bis wir wieder am linken Rand sind, dann wieder einen Schritt nach oben und diagonal nach rechts unten, und so weiter:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(1,4) \arrow[dr] & (2,4) & (3,4) & (4,4) & \cdots \\
(1,3) \arrow[u] & (2,3) \arrow[dr] & (3,3) & (4,3) & \cdots \\
(1,2) \arrow[dr] & (2,2) \arrow[ul] & (3,2) \arrow[dr] & (4,2) & \cdots \\
(1,1) \arrow[u] & (2,1) \arrow[r] & (3,1) \arrow[ul] & (4,1) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

So erhalten wir eine Durchnummerierung der Elemente in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und dies ist gerade eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Die Zahl n wird auf das n-te Element abgebildet. Da in unserer Nummerierung jedes Element genau einmal vorkommt, ist die Abbildung bijektiv. Wir haben somit gezeigt, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig sind. Dies bedeutet aber gerade, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

(H49) (a) Für $a_1^2 = 3^2 = 9 \geq 5$ ist die Aussage klar. Sei $n \geq 2$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
a_n^2 - 5 &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + \frac{5}{a_{n-1}}\right)^2 - 5 \\
&= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + 10 + \frac{25}{a_{n-1}^2}\right) - 5 \\
&= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + \frac{25}{a_{n-1}^2}\right) + \frac{5}{2} - 5 \\
&= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + \frac{25}{a_{n-1}^2}\right) - \frac{5}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 - 10 + \frac{25}{a_{n-1}^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{5}{a_{n-1}}\right)^2 \geq 0\,.
\end{aligned}$$

(b) Wir haben $a_2 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{3}\right) = \frac{14}{6} \leq 3 = a_1$. Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{5}{2a_n} \\ &= \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - 5\right) . \end{aligned}$$

Aus $a_n > 0$ folgt $2a_n > 0$ auf Grund des dritten Anordnungsaxioms und somit $\frac{1}{2a_n} > 0$ wegen Satz 8.1.5 (Kiechle-Skript 6.3.5). Mit $a_n^2 - 5 \geq 0$ (Aufgabenteil (a)) folgt dann (ebenfalls mit dem dritten Anordnungsaxiom) $\frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - 5\right) \geq 0$ und somit die Behauptung.

(c) Wenn man die ersten Folgenglieder ausrechnet kann man sehen, dass sich die Folge immer weiter dem Wert $2.236067977\ldots = \sqrt{5}$ nähert.