Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Lösungen Blatt 11 WiSe 2010/11 - Curilla/Koch/Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P34)(a-d) Für jede der vier Mengen gilt, dass die darin enthaltenen Elemente x sowohl $a \leq x$ als auch $x \leq b$ erfüllen. Folglich ist a in jedem der Fälle eine untere Schranke, b ist stets eine obere Schranke. Andererseits finden wir sowohl für geschlossene als auch für offene Intervallgrenzen immer Punkte in der Menge, die a beziehungsweise b beliebig nah kommen: Beispielsweise enthält jede der vier Mengen die Zahl $a+\frac{1}{n}$, wenn wir $n \in \mathbb{N}$ genügend groß wählen. Wir finden also keine untere Schranke, die größer als a ist, und keine obere Schranke, die kleiner als b ist. Folglich ist a in jedem der vier Fälle das Infimum, b ist stets das Supremum.
Das Infimum einer Menge ist ein Minimum, wenn es selbst in der Menge liegt. Dementsprechend ist a in den Fällen (b) und (c) das Minimum, für (a) und (d) existiert keines. Analog dazu ist b für die Mengen aus (b) und (d) das Maximum, die Mengen aus (a) und (c) besitzen kein Maximum.

(P35) (a) Wählen wir x aus dem Definitionsbereich sehr nahe an -1, so ist $x+1$ positiv, aber sehr klein. Dann ist aber $f(x)$ sehr groß: Beispielsweise ist $f(-1+\frac{1}{n}) = 2n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ in der Menge enthalten. Folglich ist das Bild von f nicht nach oben beschränkt, es existiert also keine obere Schranke und damit kein Supremum und kein Maximum.
Wählen wir sehr große $x \in \,]-1,\infty[$, so kommt der Funktionswert der 0 beliebig nahe: Wird x sehr groß, so wird auch $x+1$ sehr groß, und damit wird $\frac{2}{x+1}$ sehr klein im positiven Bereich. Folglich ist 0 das Infimum von $f(]-1,\infty[)$. Da der Wert 0 aber nie als Funktionwert von f angenommen wird, existiert kein Minimum.

(b) Wie in Teil (a) erhalten wir, dass $f(\mathbb{N})$ das Infimum 0 und kein Minimum besitzt. Die Menge $f(\mathbb{N})$ besitzt aber ein Maximum: Setzen wir 1 ein, so erhalten wir $f(1) = 1$. Setzen wir ein anderes $n \in \mathbb{N}$ in f ein, so ist $1 < n$, also auch $2 < n+1$ und damit $\frac{2}{2} > \frac{2}{n+1}$ nach Satz 8.1.5 aus der Vorlesung (Satz 6.3.5 im Kiechle-Skript) und Anordnungsaxiom (A3). Jede andere natürliche Zahl liefert also einen kleineren Funktionswert, $f(1) = 1$ ist damit das Supremum und Maximum der Menge.

(P36) (a) Das Infimum und Minimum der Menge ist -2, das Supremum und Maximum ist 4.

(b) Die Zahl $-2n$ wird beliebig klein (allerdings nicht betragsmäßig), wenn wir immer größere $n \in \mathbb{N}$ einsetzen, es existiert also kein Infimum und damit kein Minimum. Andererseits ist $-2 = -2 \cdot 1$ die größte Zahl, die in der Menge enthalten ist, also ist -2 das Supremum und Maximum.

(c) Mit Aufgabe (P34c) erhalten wir, dass das Infimum der Menge -3 ist und das Supremum 1. Da -3 in der Menge enthalten ist, ist -3 das Minimum. Es existiert kein Maximum, da 1 nicht in der Menge liegt.

(d) Die Bedingung $r^2 < 9$ ist gleichbedeutend mit $|r| < 3$, also $r \in \,]-3, 3[$. Nach Aufgabe (P34a) ist das Infimum -3, das Supremum gleich 3. Da weder -3 noch 3 in der Menge enthalten sind, existiert kein Minimum und kein Maximum.

(e) Setzen wir $n = 1$, so erhalten wir, dass $1 = \frac{2}{1} - 1$ in der Menge enthalten ist. Jede andere natürliche Zahl n ist größer als 1, setzen wir also ein $n \neq 1$ ein, so ist $\frac{2}{n}$ kleiner als $\frac{2}{1}$ nach Satz 8.1.5 aus der Vorlesung (Satz 6.3.5 im Kiechle-Skript), also auch $\frac{2}{n} - 1 < 1$. Folglich besitzt die Menge das Supremum und Maximum 1.
Die Zahl $\frac{2}{n}$ kommt der 0 beliebig nahe, wenn wir immer größere n einsetzen. Andererseits ist $\frac{2}{n} - 1$ stets größer als -1. Das Infimum der Menge ist also gleich -1, ein Minimum existiert nicht.

Hausaufgaben

(H42) (a) Da wir eine abzählbare Menge konstruieren wollen, ist es passend, die Elemente mithilfe von $\mathbb{N}$ zu konstruieren. Ein Vergleich mit (P35b) bringt uns auf die folgende Idee: Wir betrachten die Elemente $\frac{-3}{n}$. Diese Zahl kommt für große n der 0 beliebig nahe, ist aber immer kleiner als 0. Folglich ist das Supremum der Menge $\{\frac{-3}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ gleich 0, ein Maximum existiert nicht. Setzen wir die kleinste natürlich Zahl, also 1 ein, so erhalten wir die betragsmässig größte Zahl der Menge, -3. Da -3 negativ ist und vom Betrag her die größte Zahl in der Menge, ist sie Infimum und Minimum.

(b) i. Je größer wir n wählen, desto kleiner wird a_n (genau genommen müssen wir das natürlich auch noch zeigen). Folglich muss $a_1 = 1$ die größte Zahl in der Menge sein, also Supremum und Maximum. Das Infimum der Menge ist 0: a_n ist stets positiv, kommt aber der 0 beliebig nahe. Wir wollen uns dies einmal ganz genau überlegen: Ist $\epsilon > 0$, aber kleiner als 1, so ist $\frac{4}{\epsilon} - 3 > 0$, wir können also die Wurzel aus dieser Zahl ziehen. Wähle $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sqrt{\frac{4}{\epsilon} - 3} < m$ gilt (dies ist möglich mit Satz 8.4.1/Kiechle-Skript (6.7.1)). Einfaches Umformen der Ungleichung liefert, dass dann $a_m = \frac{4}{m^2+3} < \epsilon$ ist (beachten sie, dass für positive reelle Zahlen x, y mit $x < y$, wegen des Anordnungsaxioms (A3), auch $x^2 < xy$,$xy < y^2$ und somit $x^2 < y^2$ gilt). Wir finden also für noch so kleine positive Zahlen ein a_m, das kleiner ist. Folglich ist 0 das Infimum von M. Da 0 kein Folgenglied ist, ist dies kein Minimum.

ii. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: Je kleiner $|x|$ ist, desto kleiner ist x^2, also auch $x^2 + 2$. Wegen Satz 8.1.5 der Vorlesung (6.3.5 im Kiechle-Skript) ist der Kehrwert einer positiven Zahl umso größer, je kleiner die Zahl selbst ist. Das Supremum von M wird also für $x = 0$ angenommen und beträgt $\frac{1}{2}$. Da dieser Wert in der Menge M liegt, ist dies auch das Maximum.
Wiederum wegen Satz 8.1.5 wird $\frac{1}{x^2+2}$ umso kleiner, je größer der Betrag von x ist. Daraus wird schon klar, dass M kein Minimum besitzt, da wir stets ein x mit beliebig großem Betrag finden können. Eine ähnliche Überlegung wie in in Teil i) liefert, dass das Infimum vom M gleich 0 ist.

(H43) Die Formel aus dem Hinweis folgt durch einmaliges Anwenden der passenden binomischen Formel auf den rechten Term.

(a) Wir rechnen mithilfe des Hinweises: Es ist

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}\right) = 1,\\
a_2 &= \frac{1}{4\sqrt{5}}\left(2(3+\sqrt{5})-2(3-\sqrt{5})\right) = 1,\\
a_3 &= \frac{1}{8\sqrt{5}}\left(2(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})-2(3-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})\right)\\
&= \frac{2}{8\sqrt{5}}\left((8+4\sqrt{5})-(8-4\sqrt{5})\right) = 2,\\
a_4 &= \frac{1}{16\sqrt{5}}\left(4(3+\sqrt{5})^2-4(3-\sqrt{5})^2\right)\\
&= \frac{4}{16\sqrt{5}}\left((14+6\sqrt{5})-(14-6\sqrt{5})\right) = 3
\end{aligned}$$

(b) Wieder mithilfe des Hinweises berechnen wir:

$$\begin{aligned}
a_n + a_{n+1} &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n\right)\\
&\quad+\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left(2(1+\sqrt{5})^n+(1+\sqrt{5})^{n+1}-2(1-\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n(2+(1+\sqrt{5}))-(1-\sqrt{5})^n(2+(1-\sqrt{5}))\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n(3+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})^n(3-\sqrt{5})\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^n\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})^2\right)\\
&= \frac{1}{2^{n+2}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}\right)\\
&= a_{n+2}.
\end{aligned}$$

(c) Wir haben bewiesen, dass die ersten beiden Folgenglieder a_1 und a_2 natürliche Zahlen sind, und wir haben bewiesen, dass sich alle anderen Folgenglieder als Summe ihrer beiden Vorgänger berechnen lassen. Da die ersten beiden Folgenglieder in $\mathbb{N}$ liegen und die Summe zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl ist, können in diesem Prozess nur natürliche Zahlen entstehen. *Hinweis:* Diese Begründung ist bei genauerer Betrachtung ein Beweis durch Induktion.

(H44) Wir zeigen durch Induktion nach n, dass die behauptete Ungleichung gilt.
Induktionsanfang: Wegen $|a_1| = |a_1|$ gilt die Behauptung für $n = 1$.
Induktionsvoraussetzung: Sei $|\sum_{i=1}^m a_i| \leq \sum_{i=1}^m |a_i|$ für alle $a_1, a_2, ..., a_m \in K$ und ein

beliebiges, aber fest gewähltes $m \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: Wir wollen zeigen, dass unter der Induktionsvoraussetzung auch $\left|\sum_{i=1}^{m+1} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{m+1} |a_i|$ gilt für alle $a_1, a_2, ..., a_{m+1} \in K$. Wir wenden dazu erst die Dreiecksungleichung auf die zwei Summanden $a_1 + a_2 + ... + a_m \in K$ und $a_{m+1} \in K$ an und benutzen dann die Induktionvoraussetzung für $a_1, a_2, ..., a_m$:

$$\left|\sum_{i=1}^{m+1} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_i + a_{m+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{m} a_i\right| + |a_{m+1}| \leq \sum_{i=1}^{m} |a_i| + |a_{m+1}| = \sum_{i=1}^{m+1} |a_i| \,.$$

(H45) (a) Zur Injektivität: Seien, $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$, also $nx = ny$. Dann muss $n(x-y) = 0$ sein. Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist aber nur 0, wenn einer der Faktoren 0 ist ($\mathbb{Z}$ ist *nullteilerfrei*). Da $n \neq 0$ ist, muss $x - y = 0$, also $x = y$ gewesen sein. Folglich ist φ injektiv.
Zur Surjektivität: Sei $y \in n\mathbb{Z}$. Es gibt also ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $y = nx$. Dann ist aber gerade $\varphi(x) = nx = y$. Folglich ist φ surjektiv.

(b) Nach Definition 4.4 aus der Vorlesung (2.20 im Kiechle-Skript) schreiben wir $|A| = |B|$ für zwei Mengen A und B, wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt. Nach Satz 8.8 aus der Vorlesung (6.13 im Kiechle-Skript) ist $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, es gibt also eine Bijktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. Aus Aufgabenteil (a) wissen wir, dass die Umkehrabbildung φ^{-1} zu φ eine Bijektion von $n\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ ist. Folglich ist $f \circ \varphi^{-1}$ eine Bijektion zwischen $n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$, also gilt $|n\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

(c) Sei $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \in \ker\varphi$. Es ist also $\varphi(x) = e_{n\mathbb{Z}}$. Da $n\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist, ist $e_{n\mathbb{Z}} = e_{\mathbb{Z}} = 0$. Also muss $\varphi(x) = nx = 0$ sein. Da $n \neq 0$ ist, muss $x = 0$ sein. Folglich ist $\ker\varphi = \{0\}$.

(d) Wir zeigen: Die Abbildung φ ist genau dann nicht injektiv, wenn $\ker\varphi \neq \{e_G\}$ ist.
Zuerst setzen wir voraus, dass φ nicht injektiv ist, und zeigen, dass unter dieser Voraussetzung $\ker\varphi \neq \{e_G\}$ ist: Ist φ nicht injektiv, so gibt es voneinander verschiedene $g, g' \in G$ mit $\varphi(g) = \varphi(g')$, also $\varphi(g) \cdot (\varphi(g'))^{-1} = e_H$. Wegen (P29b) bedeutet dies, dass $\varphi(g) \cdot \varphi(g'^{-1}) = e_H$ ist. Da φ ein Gruppenhomomorphismus ist, ist dies wiederum äquivalent zu $\varphi(g * g'^{-1}) = e_H$, was gerade $g * g'^{-1} \in \ker\varphi$ bedeutet. Wegen $g \neq g'$ ist $g * g'^{-1} \neq e_G$, also $\ker\varphi \neq \{e_G\}$.
Nun nehmen wir an, dass $\ker\varphi \neq \{e_G\}$ ist, und zeigen, dass dann φ nicht injektiv ist: Sei dazu $g \neq e_G$ mit $g \in \ker\varphi$. Da das Element g im Kern liegt, muss $\varphi(g) = e_H$ sein. Nach (P29a) gilt dies aber auch für e_G. Da $g \neq e_G$ vorausgesetzt wurde, ist φ nicht injektiv.