Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Blatt 11 WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S. Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P34) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Bestimmen Sie jeweils (falls existent) das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum der folgenden Mengen:

(a) $]a, b[= \{r \in \mathbb{R} : a < r < b\}$, (b) $[a, b] = \{r \in \mathbb{R} : a \leq r \leq b\}$,
(c) $[a, b[= \{r \in \mathbb{R} : a \leq r < b\}$, (d) $]a, b] = \{r \in \mathbb{R} : a < r \leq b\}$.

(P35) Gegeben sei die Funktion $f\colon\ ]-1, \infty[\ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$. Bestimmen Sie (soweit existent) das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum von
(a) $M = f(]-1, \infty[)$ und (b) $M = f(\mathbb{N})$.

(P36) Bestimmen Sie (falls existent) das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum der folgenden Mengen:

(a) $\{-2, 1, 4\}$, (b) $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$, (c) $[-3, 1[$, (d) $\{r \in \mathbb{R} : r^2 < 9\}$,
(e) $\{\dfrac{2}{n} - 1 : n \in \mathbb{N}\}$.

Hausaufgaben

(H42) (a) Geben Sie eine abzählbare Menge M an, deren Infimum und Minimum gleich -3 und deren Supremum gleich 0 ist, die aber kein Maximum besitzt (ohne Begründung). (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie (falls existent) das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum

i. der Menge M der Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{4}{n^2+3}$, also

$$M = \{\frac{4}{n^2+3} : n \in \mathbb{N}\}$$

(mit Begründung), (2 Punkte)

ii. der Menge $M := \{\dfrac{1}{x^2+2} : x \in \mathbb{R}\}$ (ohne Begründung). (2 Punkte)

(6 Punkte)

(H43) Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen in $\mathbb{R}$ durch

$$a_n := \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right).$$

(a) Berechnen Sie a_1, a_2, a_3 und a_4. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie durch Nachrechnen (keine Induktion), dass $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis:* Diese Rechnung ist etwas umfangreich. Versuchen Sie, möglichst geschickt auszuklammern und benutzen Sie $2(3+\sqrt{5}) = (1+\sqrt{5})^2$ und $2(3-\sqrt{5}) = (1-\sqrt{5})^2$.

(2 Punkte)

(c) Begründen Sie mit wenigen Worten die Behauptung, dass a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist. (2 Punkte)

(6 Punkte)

(H44) Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Dreiecksungleichung für n Elemente $a_1, a_2, ..., a_n \in K$, also dass

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

gilt. Natürlich dürfen Sie hierbei die Dreiecksungleichung für zwei Elemente verwenden (Satz 8.2.4/Kiechle-Skript (6.4.4)). **(4 Punkte)**

(H45) Sei $n \in \mathbb{N}$ und φ_n die Abbildung

$$\varphi_n \colon \mathbb{Z} \mapsto n\mathbb{Z},\ x \mapsto nx,$$

wobei $n\mathbb{Z} := \{..., -3n, -2n-n, 0, n, 2n, 3n, ...\}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass φ_n bijektiv ist. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $|n\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ gilt. (1 Punkt)

(c) Die Menge $n\mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, und die Abbildung φ_n ist ein Gruppenhomomorphismus (diese beiden Fakten müssen Sie nicht beweisen). Was ist $\ker \varphi_n$? (1 Punkt)

(d) Seien $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen und $\varphi \colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $\ker \varphi = \{e_G\}$ ist.

(2 Bonuspunkte)

(4 Punkte)

Die Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben dieses Zettels muss bis zum **Beginn** der Vorlesung am **Montag, den 24. Januar 2011** in die dafür vorgesehenen Ordner auf dem Pult erfolgen.