Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Lösungen Blatt 10 WiSe 2010/11 - Curilla/Koch/Ziegenhagen

Präsenzaufgaben

(P32) Wir wollen die Ungleichung mit u und v multiplizieren. Da Mulitplikation einer Ungleichung mit einer Zahl die Ungleichung genau dann umdreht (Anordnungsaxiom (A3) und Satz 8.1.2 der Vorlesung bzw. Satz 6.3.2 im Kiechle-Skript), wenn die Zahl negativ ist, unterscheiden wir zwei Fälle:
1. Fall: $(u > 0 \wedge v > 0) \vee (u < 0 \wedge v < 0)$. Wir multiplizieren also entweder keinmal oder zweimal mit einer negativen Zahl und formen um zu

$$u^2 + v^2 \leq -2uv,$$

also zu $(u + v)^2 \leq 0$. Da das Quadrat einer Zahl ungleich 0 immer größer 0 ist, gilt dies genau dann, wenn $u + v = 0$ ist. Da u und v dasselbe Vorzeichen haben und ungleich 0 sind, ist dies nicht möglich.
2. Fall: $(u > 0 \wedge v < 0) \vee (u < 0 \wedge v > 0)$. Wir multiplizieren in diesem Fall genau einmal mit einer negativen Zahl, die Ungleichung dreht sich um und wir erhalten

$$u^2 + v^2 \geq -2uv,$$

also $(u + v)^2 \geq 0$. Dies ist immer wahr.
Insgesamt folgt somt, dass die Aussage genau dann gilt, wenn u und v unterschiedliche Vorzeichen haben.

(P33)
- Zur rechnerischen Lösung unterscheiden wir zwei Fälle.
  1. Fall: $x - 2 > 0$. Hier liefert Multiplikation mit $x - 2$ nach (A3) der Anordnungsaxiome die Ungleichung $-10x \geq (x-2)(x-3)$. Dies lässt sich umformen zu $0 \geq x^2 + 5x + 6$. Die Nullstellen des Polynoms $x^2 + 5x + 6$ sind -2 und -3, es ist also $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$. Dies ist genau dann kleiner 0, wenn einer der Faktoren größer und der andere kleiner 0 ist. Da $x+2 \geq 0 \wedge x+3 \leq 0$ nicht möglich ist, bleibt nur die Möglichkeit $x+3 \geq 0 \wedge x+2 \leq 0$, also $-3 \leq x \leq -2$. Da wir gerade den Fall $x - 2 > 0$ behandeln, sind auch diese Punkte nicht zulässig. Wir erhalten für den Fall $x - 2 > 0$ also keine Lösungen.
  2. Fall: $x - 2 < 0$. Nach Satz 8.1.2 aus der Vorlesung (6.3.2 im Kiechle-Skript) dreht die Ungleichung sich also bei Multiplikation mit $x - 2$ um. Analog zum vorigen Fall erhalten wir $0 \leq (x + 2)(x + 3)$. Dies ist genau dann wahr, wenn beide Faktoren positiv, beide Faktoren negativ oder mindestens einer der Faktoren 0 ist (also $x = -2$ oder $x = -3$). Beide Faktoren sind positiv, wenn $x > -2$ ist, beide Faktoren sind negativ, wenn $x < -3$ ist. Zusammen mit der Fallvoraussetzung $x < 2$ erhalten wir, dass alle $x \in \,]-\infty, -3] \cup [-2, 2[$ Lösungen sind.
  Da der Fall $x-2 > 0$ keine Lösungen beisteuert, ist die zu bestimmende Menge

$]-\infty, -3\,]\cup[\,-2, 2[$.
Per Skizze lässt diese sich wie folgt finden: Wir zeichnen den Graph der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2+5x+6$, siehe Abb.1. Gemäß unserer Fallunterscheidung sind die Punkte rechts von 2 genau dann Lösungen, wenn der Graph von f unterhalb (oder auf) der x-Achse verläuft und links von 2, wenn er oberhalb (oder auf) dieser Achse liegt.

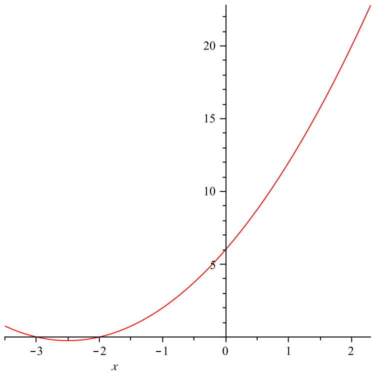

Abbildung 1: Der Graph von f.

- Wir unterscheiden wiederum nach Vorzeichen von x: Die Zahl 0 ist in der Menge enthalten. Ist $x > 0$, also auch $\frac{1}{x} > 0$, so teilen wir durch x und erhalten mit (A3) der Anordnungsaxiome $x^2-1 \leq 0$, also $x^2 \leq 1$. Dies bedeutet $-1 \leq x \leq 1$. Wegen $x > 0$ erhalten wir als Lösungen alle $x \in]0, 1]$.
  Für $x < 0$, also $\frac{1}{x} < 0$ teilen wir wieder durch x, nach Satz 8.1.2 aus der Vorlesung (6.3.2 im Kiechle-Skript) dreht die Ungleichung sich um. Wir formen um zu $x^2 \geq 1$. Wegen $x < 0$ sind dies genau die x in $]-\infty, -1]$.
  Insgesamt erhalten wir aus den drei Fällen die Menge $]-\infty, -1] \cup [0, 1]$.
  Zur Skizze: Man zeichnet den Graphen der Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - x$, siehe Abb. 2. Punkte in der Lösungsmenge sind gerade die Punkte, an denen der Graph unter oder auf der x-Achse liegt.

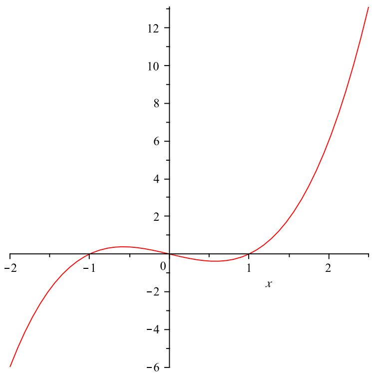

Abbildung 2: Der Graph von h.

- Um die $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, die $|4x-1| \geq 2x+5$ erfüllen, unterscheiden wir nach dem Vorzeichen von $4x-1$: Ist $4x-1 \geq 0$, so formt sich die zu untersuchende Ungleichung um zu $x \geq 3$. Die Bedingung $4x-1 \geq 0$ ist gleichbedeutend mit $x \geq \frac{1}{4}$, was für $x \geq 3$ automatisch erfüllt ist.
  Ist $4x-1 \leq 0$, also $|4x-1| = 1-4x$, so ist die zu untersuchende Ungleichung gleich $1-4x \geq 2x+5$. Umformen liefert $6x \leq -4$, also $x \leq -\frac{2}{3}$. Aus der Bedingung $4x-1 \leq 0$ folgt $x \leq \frac{1}{4}$, was keine zusätzliche Forderung bedeutet.
  Beide Fälle zusammen liefern, dass die gesuchte Menge $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [3, \infty[$ ist.
  Die Punkte lassen sich skizzieren, indem man die Graphen der Abbildungen $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |4x-1|$ und $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x+5$ zeichnet (vgl. Abb. 3) und untersucht, an welchen Punkten der Graph von i über oder auf dem Graphen von j liegt.

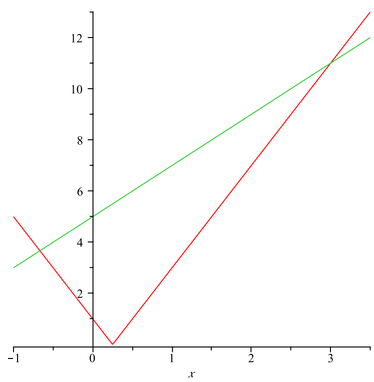

Abbildung 3: Der Graph von i (rot) und der Graph von j (grün).

Hausaufgaben

(H38) (a) Um die Lösungsmenge graphisch zu bestimmen, zeichnen wir die Graphen der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - 2x^2$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto x - 2$, siehe Abb. 4. Die gesuchte Lösungsmenge sind die x-Werte, für die der Graph von f über dem Graphen von g liegt.
Nun bestimmen wir die Lösungmenge rechnerisch. Es ist $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$. Wir wollen durch $x - 2$ teilen und unterscheiden dazu drei Fälle:
1. Fall: $x = 2$. In diesem Fall sind beide Seiten der Ungleichung gleich 0, sie ist also nicht erfüllt.
2. Fall: $x > 2$. Dann ist $x - 2 > 0$, also auch $\frac{1}{x-2} > 0$, und nach Anordnungsaxiom (A3) liefert Division durch $x - 2$ die Ungleichung $x^2 > 1$. Dies gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, die wir in diesem Fall betrachten.
3. Fall: $x < 2$. Hier ist $x - 2 < 0$, nach Satz 8.1.2 aus der Vorlesung (Satz 6.3.2 im Kiechle-Skript) vertauschen die Seiten der Ungleichung bei Division durch $x - 2$. Wir erhalten also die Ungleichung $x^2 < 1$. Dies ist für alle $x \in \,]-1,1[$ erfüllt, die auch alle für den 3. Fall zugelassen sind.
Insgesamt erhalten wir als Lösungsmenge $]-1,1[\, \cup \,]2,\infty[$.

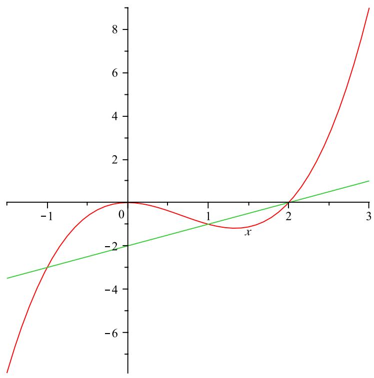

Abbildung 4: Der Graph von f (rot) und der Graph von g (grün).

(b) Wie im ersten Teil der Aufgabe zeichnen wir die Graphen der Funktionen $h\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x-2}$ und $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto x - \frac{1}{2}$, siehe Abb. 5. Die gesuchte Lösungsmenge besteht aus den x-Werten, für die der Graph von j über oder auf dem Graphen von h liegt.
Zur rechnerischen Bestimmung der Lösungsmenge: Für $x = 2$ ist die Ungleichung nicht definiert. Wir unterscheiden nach dem Vorzeichen von $x - 2$:
1. Fall: $x - 2 > 0$. Nach (A3) der Anordnungsaxiome liefert Multiplikation mit $x - 2$ in diesem Fall die Ungleichung $1 \leq x^2 - \frac{5}{2}x + 1$, also $x^2 - \frac{5}{2}x \geq 0$. Da wir $x > 2$, also $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ voraussetzen, liefert (A3) wieder $x - \frac{5}{2} \geq 0$, also $x \geq \frac{5}{2}$.
2. Fall: $x - 2 < 0$. Nach Satz 8.1.2 aus der Vorlesung (Satz 6.3.2 im Kiechle-Skript) dreht die Ungleichung sich bei Multiplikation mit $x - 2$ um, wir erhalten

also $1 \geq x^2 - \frac{5}{2}x + 1$, also $x^2 - \frac{5}{2}x \leq 0$. Für 0 ist dies erfüllt. Teilen wir durch $2 > x > 0$, so erhalten wir $x \leq \frac{5}{2}$, was erfüllt ist. Teilen wir durch $x < 0$, so liefert dies wegen $\frac{1}{x} < 0$ nach Satz 8.1.2 aus der Vorlesung $x \geq \frac{5}{2}$, was im 2. Fall nie gilt. Der 2. Fall liefert folglich die Lösungen $0 \leq x < 2$.
Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge $[0, 2[\cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right[$.

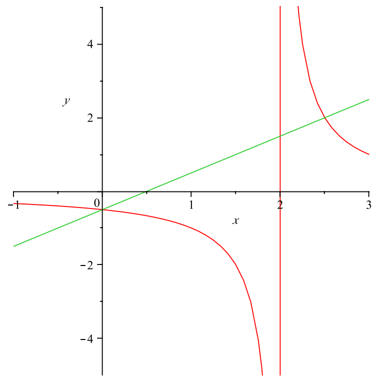

Abbildung 5: Der Graph von h (rot) und der Graph von j (grün). Die waagerechte Asymptote zu h ist ebenfalls in rot dargestellt.

(H39) Für $x = -5$ und $x = 2$ ist die Ungleichung nicht definiert. Da $|x+5| > 0$ ist, können wir die Ungleichung mithilfe des Anordnungaxioms (A3) zu

$$x < \frac{|x+5|}{x-2}$$

umformen. Wir führen eine Fallunterscheidung nach den Vorzeichen von $x + 5$ und $x - 2$ durch:
1. Fall: $x < -5$ und $x < 2$. Dann ist $|x + 5| = -x - 5$ und nach Satz 8.1.2 aus der Vorlesung (6.3.2 im Kiechle-Skript) liefert Multiplikation mit $x - 2$ die Ungleichung $x^2 - 2x > -x - 5$. Dies formen wir zu $x^2 - x + 5 > 0$ um. Die linke Seite ist aber gleich $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{19}{4}$, und dieser Ausdruck ist stets größer als 0. Folglich ist $]-\infty, -5[\subseteq L$.
2. Fall: $x < -5$ und $x > 2$: Dies ist nicht möglich.
3. Fall: $x > -5$ und $x < 2$. Damit ist $|x+5| = x+5$. Wie im 1. Fall erhalten wir nach Multiplikation mit $x - 2$ die Ungleichung $x^2 - 2x > x + 5$. Quadratische Ergänzung liefert $(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} = x^2 - 3x$, dies setzen wir in die definierende Ungleichung ein und erhalten $(x - \frac{3}{2})^2 > \frac{29}{4}$. Wir ziehen die Wurzel und formen um:

$$(x - \frac{3}{2})^2 > \frac{29}{4} \Leftrightarrow |x - \frac{3}{2}| > \frac{\sqrt{29}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3+\sqrt{29}}{2} & \text{falls } x \geq \frac{3}{2}, \\ x < \frac{3-\sqrt{29}}{2} & \text{falls } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Da $\frac{3+\sqrt{29}}{2} > \frac{3+\sqrt{25}}{2} = 4 > 2 > x$ ist, ist ersteres nie erfüllt. Wegen $\frac{3-\sqrt{29}}{2} < \frac{3-\sqrt{25}}{2} = -1 < \frac{3}{2}$ liefert der zweite Fall, dass alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-5 < x < \frac{3-\sqrt{29}}{2}$ in L liegen.
4.Fall: $x > -5$ und $x > 2$. Dieser Fall verläuft analog zum 3. Fall, nur dreht sich

bei Multiplikation mit $x-2$ die Ungleichung nicht um. Wir erhalten also, dass die Ungleichung sich umformen lässt zu

$$|x-\frac{3}{2}|<\frac{\sqrt{29}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{3+\sqrt{29}}{2} & \text{falls } x\geq\frac{3}{2},\\ x>\frac{3-\sqrt{29}}{2} & \text{falls } x<\frac{3}{2}.\end{cases}$$

Wegen $x>2$ tritt der zweite Fall nicht auf und die Bedingung des ersten Falls ist stets erfüllt. Wir erhalten, dass alle x mit $2<x<\frac{3+\sqrt{29}}{2}$ in L liegen.
Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}L &= \{x\in\mathbb{R}: x<-5\ \vee\ -5<x<\frac{3-\sqrt{29}}{2}\ \vee\ 2<x<\frac{3+\sqrt{29}}{2}\}\\ &= \left]-\infty,-5\right[\bigcup\left]-5,\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right[\bigcup\left]2,\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right[.\end{aligned}$$

(H40) Wir zeigen zunächst, dass $(\mathbb{R},\oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. Seien $x,y,z\in\mathbb{R}$ beliebig.
$(\mathbb{R},\oplus)$ ist assoziativ: Es ist

$$\begin{aligned}(x\oplus y)\oplus z &= (x+y-1)\oplus z=(x+y-1)+z-1=x+y+z-2\\ &= x+(y+z-1)-1=x\oplus(y+z-1)=x\oplus(y\oplus z).\end{aligned}$$

Wir beweisen nun die Kommutativität von $(\mathbb{R},\oplus)$, um die Existenz des neutralen und der inversen Elemente nur noch für eine Seite zeigen zu müssen: Wegen $x\oplus y=x+y-1=y+x-1=y\oplus x$ ist $(\mathbb{R},\oplus)$ kommutativ.
Das neutrale Element bezüglich $\oplus$ ist $1\in\mathbb{R}$: Es gilt $1\oplus x=1+x-1=x$. Das inverse Element zu x bezüglich $\oplus$ ist $2-x$: Es ist $(2-x)\oplus x=2-x+x-1=1$, und 1 ist wie eben gezeigt das neutrale Element bezüglich $\oplus$.
Wir haben also bewiesen, dass $(\mathbb{R},\oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.
Nun zeigen wir, dass $(\mathbb{R}^*,\odot)$ eine abelsche Gruppe ist. Dabei sei daran erinnert, dass das neutrale Element bezüglich $\oplus$ gleich $1\in\mathbb{R}$ ist, also ist $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Seien also $x,y,z\in\mathbb{R}^*$.
$(\mathbb{R}^*,\odot)$ ist assoziativ: Es gilt

$$\begin{aligned}(x\odot y)\odot z &= (xy-x-y+2)\odot z\\ &= (xy-x-y+2)z-(xy-x-y+2)-z+2\\ &= xyz-xy-xz-yz+x+y+z\\ &= x(yz-y-z+2)-x-(yz-y-z+2)+2\\ &= x\odot(yz-y-z+2)\\ &= x\odot(y\odot z).\end{aligned}$$

Wir beweisen wiederum zunächst die Kommutativität von $(\mathbb{R}^*,\odot)$: Es ist $x\odot y=xy-x-y+2=yx-y-x+2=y\odot x$. Wegen $2\odot x=2x-2-x+2=x$ ist $2\in\mathbb{R}^*$ das neutrale Element in $(\mathbb{R}^*,\odot)$, und das inverse Element zu x bezüglich $\odot$ ist $\frac{x}{x-1}$, denn es ist $\frac{x}{x-1}\odot x=\frac{x^2}{x-1}-x-\frac{x}{x-1}+2=\frac{x^2-x(x-1)-x}{x-1}+2=2$. Man beachte, dass

wegen $x \in \mathbb{R}^*$, also $x \neq 1$ das Inverse zu x stets existiert.
Damit ist bewiesen, dass $(\mathbb{R}^*, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist. Es bleiben die Distributivgesetze zu beweisen. Da auch ganz $\mathbb{R}$ bezüglich $\odot$ kommutativ ist (mit demselben Argument wie oben) genügt es, eines der beiden Distributivgesetze nachzurechnen. Seien also $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
x \odot (y \oplus z) &= x \odot (y + z - 1) = x(y + z - 1) - x - (y + z - 1) + 2 \\
&= xy + xz - 2x - y - z + 3 \\
&= (xy - x - y + 2) + (xz - x - z + 2) - 1 \\
&= (x \odot y) + (x \odot z) - 1 \\
&= (x \odot y) \oplus (x \odot z).
\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ ein Körper ist.

(H41) (a) Wir zeigen zuerst „$\Rightarrow$“ mit Hilfe eines Beweises durch Widerspruch: Angenommen es ist $a \neq b$. Aus $a \leq b$ folgt dann wegen der Antisymmetrie der Relation $\neg(b \leq a)$, ein Widerspruch.

Als nächstes zeigen wir „$\Leftarrow$“: Weil R reflexiv ist, gilt $a \leq a$. Ist nun $a = b$, so folgt somit $a \leq b$ und $b \leq a$.

(b) Zuerst „$\Rightarrow$“: Ist $a \neq b$ und $a \leq b$, so folgt $\neg(b \leq a)$ aus der Antisymmetrie.

Nun zeigen wir „$\Leftarrow$“: Aus $\neg(b \leq a)$ folgt $a \neq b$. Weil R eine totale Relation ist, muss dann aber $a \leq b$ gelten (denn $b \leq a$ ist ja nicht möglich).