Vorkurs Mathematik
Herbst 2009

M. Carl
E. Bönecke

# Skript Teil VI

## 1. Stetigkeit

**Definition 1.** *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* **stetig** *im Punkt $p$, wenn für alle konvergente Folgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$ mit gleichen Grenzwert $p$ auch die Folgen $n \mapsto f(x_n)$ gleichen Grenzwert $f(p)$ haben. Gilt das für alle $p \in \mathbb{R}$, heißt $f$ selbst stetig.*

Bevor wie Stetigkeit veranschaulichen, betrachten wir Beispiele:

(1) Die Stufen- bzw. Heavysidefunktion

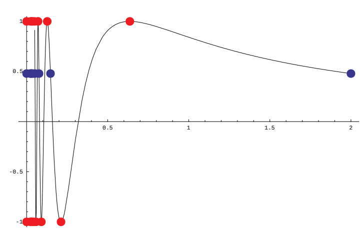
$$\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ist unstetig in 0, denn die beiden Folgen $n \mapsto \theta(\pm\frac{1}{n})$ haben verschiedene Grenzwerte 0 bzw. 1.

(2) Die Integralfunktion von $\theta$ ist stetig:

$$\int \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

(3) Die Fortsetzung $f$ der Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ durch 0 in 0 ist nicht stetig in 0:



Zum einen gibt es Nullfolgen $n \mapsto x_n$, deren Bild unter $f$ gegen beliebige Werte in $[-1, 1]$ konvergiert, nämlich z.B.

$$x_n := \frac{1}{2\pi n + a} \quad \Rightarrow \quad f(\tfrac{1}{x_n}) = \sin(a)$$

(blaue Punkte), zum anderen gibt es sogar Nullfolgen, deren Bild gar nicht konvergiert, z.B.

$$x_n := \frac{1}{\pi(n + 1/2)} \quad \Rightarrow \quad f(\tfrac{1}{x_n}) = (-1)^n$$

(rote Punkte).

Stetigkeit bedeutet also, dass die Änderungen der Funktionswerte beliebig klein ist bei entsprechend kleiner Variation der Argumente. Genauer hat eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften:

(1) Der Graph $\{(x, f(x)) \mid \ x \in \mathbb{R}\}$ (d.h. $f$ aufgefasst als Relation in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$) ist **zusammenhängend** – sowohl anschaulich als auch im später definierten mathematischen Sinne. Die Umkehrung gilt nicht; wie Beispiel 3 zeigt. Jedenfalls kann damit $\theta$ nicht stetig sein, denn der Graph zerfällt in zwei getrennte Strahlen.

(2) Aus (1) folgt: Liegt sowohl $a$ als auch $b$ im Bild von $f$, so auch das ganze Intervall $[a, b]$:
$$a, b \in f(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad [a, b] \in f(\mathbb{R}).$$
Diese Eigenschaft heißt aus offensichtlichem Grunde **Zwischenwertsatz**. Wieder ist $\theta$ ein Gegenbeispiel.

(3) $f$ ist stetig in $p$ genau dann, wenn es zu jedem offenen Intervall $U$ um $f(p) \in U$ ein offenes Intervall um $p$ gibt, dessen Bild in $U$ liegt. Für $\theta$ wähle z.B. $U := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \ni f(0)$ als Gegenbeispiel.

(4) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beide stetig, so nach Übung IV.2 auch
$$\begin{array}{lll} f + g : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto f(x) + g(x), \\ f \cdot g : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto f(x) \cdot g(x), \end{array}$$
(man spricht deshalb von der **Algebra** stetiger Funktionen), ebenso ist die Verkettung $f \circ g$ stetig.

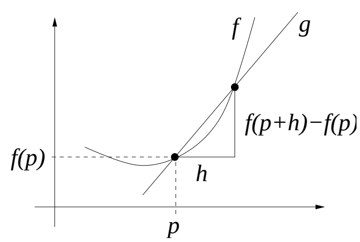
(5) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und **streng monoton wachsend**, d.h.
$$x > y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y),$$
so ist $f$ injektiv und das Bild von $f$ ist ein offenes (möglicherweise unbeschränktes) Intervall $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ nach dem Zwischenwertsatz; also besitzt $\tilde{f} : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}),\ x \mapsto f(x)$ eine Umkehrfunktion $\tilde{f}^{-1}$. Dann ist auch $\tilde{f}^{-1}$ stetig. Z.B. ist damit $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ stetig, denn $\mathrm{id}^3$ ist stetig gemäß (4) und streng monoton.

## 2. Differentiation

Wir wollen nun genauer fragen, wie sich die Änderung des Funktionswertes gegenüber Änderungen des Arguments messen lässt. Dazu bemerke, dass das Änderungsverhältnis (die sog. *Steigung der Sekanten* $\sec_p f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $f$ durch $p$)

$$\sec_p f(h) := \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstanten Wert $m \in \mathbb{R}$ hat genau dann, wenn $f$ eine Gerade $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = mx + g(0)$ ist. Ist $f$ keine Gerade, also $\sec_p f$ nicht konstant, aber $\sec_p f$ stetig in 0, so ist $\sec_p f(0)$ die Steigung der Grenz-Geraden, die $f$ in $p$ tangential berührt.




**Definition 2.** *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* **differenzierbar** *im Punkt $p$ mit Steigung $f'(p) \in \mathbb{R}$, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen vorliegt:*

(1) *Die Steigung der Sekanten $\sec_p f$ durch $p$ ist stetig in 0 mit $\sec_p f(0) = f'(p)$.*
(2) *$f$ gleicht bei $p$ einer Geraden bis auf einen Fehler, der von zweiter Ordnung in der Variation $h$ verschwindet, d.h. in Formeln:*

$$f(p+h) = f(p) + f'(p) \cdot h + h \underbrace{(\sec_p f - f'(p))}_{\textit{stetig in } 0 \textit{ mit Funktionswert 0}}(h)$$

*Gilt das für alle $p \in \mathbb{R}$, so heißt $f$ differenzierbar mit* **Ableitung** *$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p \mapsto f'(p)$.*

*Bemerkung 1:* Die zweite Formulierung ist der Beginn der sog. **Taylorentwicklung** von $f$ um $p$, d.h. der Approximation von $f$ durch Polynome steigenden Grades. Unsere Potenzreihen aus Teil IV stimmen dann mit ihrer Taylorentwicklung überein.

*Bemerkung 2:* Anhand der zweiten Formulierung sieht man direkt, dass eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch stetig ist.

Beispiele:

(1) $\int \theta$ ist stetig, aber nicht differenzierbar in 0, denn die Sekanten-Steigungsfunktion ist $\sec_0 \int \theta = \theta$, also unstetig in 0 nach Beispiel 1.

(2) $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist differenzierbar, denn die Sekantensteigung
$$\frac{(p+h)^2 - p^2}{h} = 2p + h$$
ist stetig in $h = 0$ mit Wert $2p$. Also $(\mathrm{id}^2)'(p) = 2p$.

(3) Die Exponentialfunktion erfüllt $\exp(p+h) = \exp(p) \cdot \exp(h)$. Folglich sind alle Sekanten-Steigungsfunktionen $\sec_p \exp$, $p \in \mathbb{R}$ durch $\sec_0 \exp$ bestimmt:
$$\begin{aligned} \sec_p \exp(h) &= \tfrac{\exp(p+h)-\exp(p)}{h} \\ &= \exp(p)\tfrac{\exp(h)-1}{h} \\ &= \exp(p) \cdot \sec_0 \exp(h). \end{aligned}$$
Man kann nun zeigen, dass $\sec_0 \exp$ stetig in 0 mit Wert 1 ist, also
$$\exp' = \exp\,.$$

## 3. Ableitungsregeln

(1) **Kettenregel:** Die Verkettung von zwei Geraden $g_i : x \mapsto m_i x$, $i \in \{1,2\}$ mit Steigungen $m_1, m_2$ ist die Gerade $g_1 \circ g_2 : x \mapsto m_1 \cdot m_2 x$ mit Steigung $m_1 \cdot m_2$, also gilt für zwei differenzierbare Funktionen $f_1, f_2$:
$$(f_1 \circ f_2)' = (f_1' \circ f_2) \cdot f_2'.$$

(2) **Umkehrfunktion:** Sei $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ differenzierbar (also stetig nach Bemerkung 2) mit $f'(p) \neq 0$ für alle $p$ (also streng monoton). Dann existiert eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1}$ gemäß (5). $f^{-1}$ ist sogar differenzierbar mit Ableitung
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$
Diese Regel ist ein Spezialfall der Kettenregel:
$$\mathrm{id} = f \circ f^{-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = (f \circ f^{-1})' = (f' \circ f^{-1})(f^{-1})'.$$
Alternativ folgt sie aus der Spiegelung des Graphens an der Diagonalen, welche die Steigung von $f^{-1}$ in $p$ in das Inverse der Steigung von $f$ in $f^{-1}(p)$ überführt:

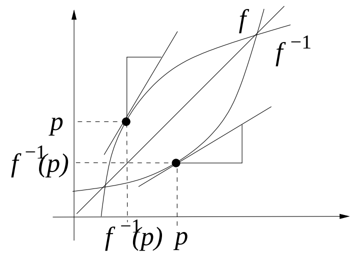



Bild zur Ableitung der Umkehrfunktion.

(3) **Produktregel:** (Auch ein Spezialfall der Kettenregel, aber für Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, siehe Analysis II ). Das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Beweis: Die Steigung der Sekanten ist

$$\frac{(fg)(p+h)-fg(p)}{h} = \frac{f(p+h)(g(p+h)-g(p))+(f(p+h)-f(p))g(p)}{h},$$

also stetig in $h = 0$ mit obigem Grenzwert. □

## 4. Geometrische Interpretation von Sinus und Kosinus

In Teil IV haben wir die Konvergenz der Sinus- und Kosinusreihe

$$\sin(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \qquad \cos(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

bewiesen. Diese Reihen haben folgende geometrische Interpretation:

**Satz 1.** $(\cos(x), \sin(x))$ *sind die Koordinaten jenes Punktes auf dem Einheitskreis* $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ |x| = 1\}$, *dessen Verbindungskurve (Bogen) nach* $(0, 1)$ *in* $S^1$ *in Uhr-Umlaufrichtung Länge x (vgl. untenstehendes Bild) hat.*

Natürlich sind wir noch Einiges von der rigorosen Definition dieser Länge entfernt, dennoch können wir das Resultat plausibel machen. Am einfachsten und natürlichsten folgert man Satz 1 aus der Eigenschaften der Exponentialfunktion fortgesetzt auf den sog. komplexen Zahlenkörper $\mathbb{C}$. Für unsere Zwecke kann man jedoch auch ohne $\mathbb{C}$ auskommen:

Zum einen bemerken wir, dass

(1) $$\sin' = \cos \text{ und } \cos' = -\sin$$

in beiden Definitionen gilt. Für die Reihendefinition folgt dass aus der Tatsache, dass man konvergente Potenzreihen gliedweise differenzieren darf. Für die geometrische Definition folgt das aus der Ähnlichkeit des blauen und schwarzen Dreiecks in folgendem Bild:

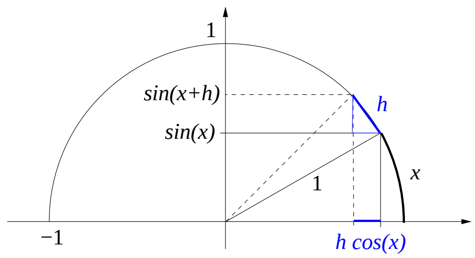



BILD zu $\sin'(x) = \cos(x)$

Zum anderen bemerken wir, dass Differenzieren mit folgenden Operationen vertauscht:

(1) Translation des Graphens längs der $x$-Achse:
$$(x \mapsto f(x-a))' = x \mapsto f'(x-a) \quad \text{für alle } a \in (\mathbb{R},+).$$
(2) Streckung des Graphens längs der $y$-Achse:
$$(b \cdot f)' = b \cdot f' \quad \text{für alle } b \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot).$$
(3) Addition von Funktionen: $(f+g)' = f' + g'$.

Die Gleichungen (1) sind also nicht eindeutig lösbar. Man kann aber zeigen, dass man alle Lösungen durch obige Operationen erfassen kann. Folglich sieht man anhand $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ in beiden Fällen, dass beide Definitionen übereinstimmen müssen.

Vorkurs Mathematik M. Carl
Herbst 2009 E. Bönecke

# Übungen Teil VI

## Part A (Differentialrechnung)

**Aufgabe 1.** Die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist differenzierbar (als Produkt von Identitäten $\mathrm{id} : x \mapsto x$).

a) Berechne $f_n'(x)$ anhand der Definition der Ableitung.

b) Zeige $f_n'(x) := nx^{n-1}$ mit Hilfe der Produktregel induktiv.

**Aufgabe 2.** Berechne alle existierenden höheren Ableitungen von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^n, & x > 0 \\ 0\ , & x \leq 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 3.** Berechne die existierenden ersten Ableitungen der folgenden Abbildungen $f : \{x \in \mathbb{R} \mid \ x > 0\} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) := x \log(x)$.

b) $f(x) := x^{2x}$.

## Part B (Kurvendiskussion)

**Aufgabe 4.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Untersuche, ob Ableiten folgende Eigenschaften erhält:

a) Spiegelsymmetrie: $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ (Spezialfälle beachten)

b) Periodizität: $f(x) = f(x+1)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Monotonie: $f(x) \geq f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \geq y$.

d) Gruppenmorphismus: $f(x+y) = f(x)f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 5.** Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + ax^2 + bx$ auf lokale Extrema in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 6.** Zeige: Die Funktion $\tan := \frac{\sin}{\cos}$ ist invertierbar auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit Bild $\mathbb{R}$. Berechne die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

und erkläre das Ergebnis geometrisch.