Vorkurs Mathematik M. Carl
Herbst 2009 E. Bönecke

Skript und Übungen Teil IV

1. Folgen und die Konstruktion von $\mathbb{R}$

Im vorherigen Kapitel haben wir $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ über (formale) Lösungsmengen von Gleichungen der Form $x \cdot y = c$ für zwei ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ eingeführt. Neue Probleme treten auf, wenn man Gleichungen der Form $x \cdot x = c$ lösen möchte:

Lemma 1. *Sei $c \in \mathbb{N}$. Hat die Gleichung $x^2 = c$ keine ganzzahlige Lösung, so hat sie auch keine rationale Lösung.*

Beweis: Angenommen, es gäbe eine Lösung $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Dann können wir annehmen, dass $b > 1$ und $\frac{a}{b}$ vollständig gekürzt ist, d.h. die Primfaktorzerlegungen von a, b disjunkt sind. Dann sind aber auch die Primfaktorzerlegung von a^2 und b^2 disjunkt, also ist $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2} \notin \mathbb{Z}$. $\square$

Wir können uns aber einer Lösung beliebig dicht annähern, d.h. eine Folge von rationalen Zahlen $(x_0, x_1, x_2, x_3, ...)$ konstruieren, so dass der Fehler $x_n^2 - c$ mit steigendem n beliebig klein wird. Dazu brauchen wir neue Definitionen:

Definition 1. *Eine* **Folge** *rationaler (bzw. reller) Zahlen ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R}$). Man notiert die Werte $x(n)$ meist kürzer als x_n.*

Um eine Folge zu beschreiben, muss man also unendlich viele Werte x_n, $n \in \mathbb{N}$ angeben – das ist im Allgemeinen nur induktiv möglich. Zum Beispiel wird die durch $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...)$ angedeute Folge für alle $n \in \mathbb{N}$ durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n$ beschrieben. Das *definiert* gerade die Folge $n \mapsto (\frac{1}{2})^n$.

Aufgabe 1. Finde eine induktive Definition für die Folge der Fibonacci-Zahlen $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$, die Fibonacci als Modell für eine Hasenpopulation als Funktion der Generation verwendete.

Bemerke, dass sich die Folge $n \mapsto (\frac{1}{2})^n$ mit wachsendem n beliebig dicht der 0 annähert, d.h. gegen Null konvergiert in folgendem Sinne:

Definition 2. *Eine Folge $n \mapsto x_n$* **konvergiert** *gegen einen* **Grenzwert** *$x_\infty \in \mathbb{Q}$ (bzw. $x_\infty \in \mathbb{R}$), falls es für jeden (beliebig kleinen, aber* *positiven) Abstand $\epsilon > 0$ eine Zahl $N(\epsilon)$ gibt, ab der alle Folgenwerte noch kleineren Abstand zu x_∞ haben, in Formeln:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} :\ |x_n - x_\infty| < \epsilon\ \ \forall n > N(\epsilon).$$

Eine **Nullfolge** *ist eine Folge, die gegen Null konvergiert.*

Aufgabe 2. Welche der folgenden Eigenschaften einer Folge $n \mapsto x_n$ sind äquivalent zur Konvergenz? Begründe!

a) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es nur endlich viele n, so dass $|x_n - x_\infty| > \epsilon$.
b) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es unendlich viele n, so dass $|x_n - x_\infty| < \epsilon$.

Aufgabe 3. Zeige anhand der Definition, dass:

a) $n \mapsto x_n := \frac{2n+2}{3n+6}$ gegen $\frac{2}{3}$ konvergiert
b) $n \mapsto x_n + y_n$ gegen $x_\infty + y_\infty$ konvergiert, falls $n \mapsto x_n$ gegen x_∞ und $n \mapsto y_n$ gegen y_∞ konvergiert.

Wir wollen nun unsere Folge rationaler Zahlen x_n konstruieren, die sich einer Lösung $x^2 = c$ beliebig dicht annähert. Dazu schreiben wir die zu lösende Gleichung $(x_n - \epsilon_n)^2 = c$ in der Form $\epsilon_n = \frac{x_n^2 + \epsilon^2 - c}{2x_n}$ und vernachlässigen den in ϵ_n quadratischen (also potentiell kleinsten) Summanden $\frac{\epsilon^2}{2x_n}$ in der Folge $x_{n+1} = x_n - \epsilon_n$, d.h. definieren die *Wurzelfolge* über

$$x_0 = c \text{ und } x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{x_n^2 + c}{2x_n}. \tag{1}$$

Nach Lemma 1 hat diese Folge *keinen* Grenzwert in $\mathbb{Q}$. Dennoch ist die Folge "konvergent" in dem Sinne, dass alle Abstände $|x_n - x_m| < \epsilon$ beliebig klein werden, sobald $n, m > N(\epsilon)$ entsprechend groß genug sind. Solche Folgen heißen **Cauchy-Folgen**. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, und wir können nun umgekehrt Cauchy-Folgen ohne rationalen Grenzwert konvergent machen, indem wir die Menge $\mathbb{Q}$ um die Grenzwerte solcher Folgen bereichern. Formal geschieht das wie folgt:

Definition 3. $\mathbb{R}$ *ensteht aus der Menge der Cauchy-Folgen in* $\mathbb{Q}$ *durch Identifikation von Cauchy-Folgen, deren Differenz eine Nullfolge ist.*

Unser so konstruiertes $\mathbb{R}$ hat nun folgende Eigenschaften, die $\mathbb{Q}$ fehlen:

(1) Per Konstruktion ist in $\mathbb{R}$ eine Folge genau dann konvergent, wenn sie Cauchy ist. Insbesondere hat damit die Gleichung $x^2 = c$ in $\mathbb{R}$ stets eine Lösung, notiert als $\sqrt{c}$, nämlich den Grenzwert der Cauchyfolge (1).

Randbemerkung: Allgemeiner werden wir in Teil VI sehen, dass jede Gleichung $f(x) = c$ für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die Werte ober- und unterhalb von c annimmt, auch den Wert c selbst annimmt, und die Wurzelfolge wird Spezialfall des Newtonverfahrens für differenzierbare f.

(2) $\mathbb{R}$ ist **überabzählbar** (im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$), d.h. es gibt keine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

(3) Zwar hat das **offene Intervall**, d.h. die Menge

$$(a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid \; a < x < b \}$$

kein Minimum $m \in (a, b) : m \leq x \; \forall x \in (a, b)$, doch gibt es stets eine **größte untere Schranke**

$$\max \{ m \in \mathbb{R} \mid \; m \leq x \; \forall x \in (a, b) \} \, ,$$

nämlich a (im Gegensatz zur Situation in $\mathbb{Q}$, denn z.B. hat $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ nach Lemma 1 ja gerade keine rationale größte untere Schranke). Damit läßt sich $\mathbb{R}$ auch direkt axiomatisch definieren.

Aufgabe 4.

a) Konstruiere eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

b) Konstruiere eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. (Wie folgt daraus die Existenz einer Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$?)

Eine Folge $n \mapsto x_n$ (oder allgemeier, jede Abbildung $x : X \to \mathbb{R}$) heißt **beschränkt**, falls ihr Bild in einem **abgeschlossenen Intervall**

$$[a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid \; a \leq x \leq b \}$$

enthalten ist, also a eine untere und b eine obere Schranke für alle Funktionswerte ist. Nach Eigenschaft (3) von $\mathbb{R}$ gibt es dann auch ein kleinstes solches Intervall.

Insbesondere ist jede konvergente Folge beschränkt, denn nur endlich viele Folgenwerte liegen außerhalb eines Intervalls $(x_\infty - \epsilon, x_\infty + \epsilon)$ um den Grenzwert x_∞. Die Umkehrung gilt nicht, wie z.B. die Folge $n \mapsto (-1)^n$ zeigt. Aus der Eigenschaft (3) von $\mathbb{R}$ folgt aber:

Lemma 2. *Ist eine Folge* $\mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto x_n$ *nicht nur beschränkt, sondern auch* **monoton fallend**, *d.h.* $x_n \leq x_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$, *so muss sie gegen die größte untere Schranke konvergieren.* □

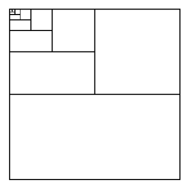
Aufgabe 5. Zeige mit Hilfe des Lemmas und vollständiger Induktion, dass die Wurzelfolge (1) konvergiert.

2. Reihen

Addiert man die ersten $n{+}1$ Werte $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ einer Folge $k \mapsto x_k$ auf, erhält man eine neue Folge

$$n \mapsto y_n := \sum_{i=0}^{n} x_i := x_0 + x_1 + ... + x_n$$

Solche Folgen heißen Reihen. Interpretiert man zum Beispiel die Werte der Folge $x_k = (\frac{1}{2})^k$ aus Beispiel 3 als Flächeninhalt geeigneter Rechtecke, so können wir die zugehörige Reihe wie folgt veranschaulichen:



Wir sehen, dass die Reihe gegen den Fächeninhalt 2 des einhüllenden Quadrats konvergiert, d.h. $\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k = 2$. Das ist gerade der Spezialfall $q = \frac{1}{2}$ der folgenden

Aufgabe 6. *(Geometrische Reihe)* Beweise (z.B. durch vollständige Induktion) die Formel

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Folgere, dass

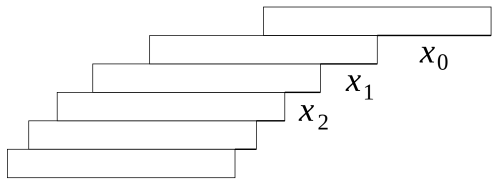
$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1 - q}, \text{ falls } |q| < 1.$$

Bemerke, dass die Folge der Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke gegen Null konvergiert. Allgemein gilt:

Satz 1. *Damit eine Reihe $n \mapsto \sum_{i=0}^{n} x_i$ konvergiert, muss die zugrundeliegende Folge $i \mapsto x_i$ eine Nullfolge sein.*

Beweis: Aus der Cauchy-Konvergenz $|\sum_{i=n}^{m} x_i| < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0; m, n > N(\epsilon)$ folgt $|x_n| < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0; m = n > N(\epsilon)$. □

Jedoch erzeugt nicht jede Nullfolge eine konvergente Reihe, das Standard-Gegenbeispiel ist die *harmonische Reihe*, die aus der Nullfolge $x_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ entsteht. Diese beschreibt gerade das Stapeln von identischen Quadern mit maximalen Überhang x_i, so dass die Gesamtkonstruktion gerade noch stabil ist:



Dass $y_n := \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}$ nicht konvergiert, sieht man durch Zerlegung der Summe in Teilsummen, deren kleinster Summand einzige $\frac{1}{2}$-Potenz ist:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \geq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \geq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4} & \geq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} & \geq & \frac{1}{2}, \end{array}$$

und besagt, dass der Überhang $x_0 + x_1 + x_2 + ...$ von *endlich* vielen gestapelten Quadern beliebig groß werden kann, ohne dass die Konstruktion instabil wird.

3. Vorgriff: Einige Potenzreihen

Eine Anwendung der geometrischen Reihe ist das folgende Konvergenzkriterium für Reihen:

Satz 2. (Quotientenkriterium) *Eine Reihe $n \mapsto \sum_{i=0}^n x_i$ konvergiert, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, ab der alle Quotienten $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, $n \geq N$ mit $x_n \neq 0$ kleinergleich einer reellen Zahl $q < 1$ sind.*

Beweis: Wir können $N = 0$ annehmen (denn endlich viele Ausnahmen stören die Konvergenz nicht) und $x_n \neq 0$ für alle n. Aus $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q$ folgt dann induktiv $\left|\frac{x_{n+1}}{x_0}\right| \leq q^n$, also

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \leq |x_0| \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{|x_0|}{1-q}.$$

Mithin ist $n \mapsto \sum_{i=0}^n |x_i|$ beschränkt und monoton wachsend, also konvergent nach Lemma 1. Dann konvergiert aber erst recht $n \mapsto \sum_{i=0}^n x_i$, denn $|\sum_{i=m}^n x_i| \leq \sum_{i=m}^n |x_i| < \epsilon$ für alle $n, m > N(\epsilon)$. □

Damit verifiziert man sofort die Konvergenz der **Exponential-**, **Sinus-** und **Kosinusreihe**

$$\exp(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

deren Zusammenhang und Eigenschaften wir später untersuchen.