Vorkurs Mathematik — M. Carl
Herbst 2009 — E. Bönecke

Skript und Übungen Teil II

Das erste Semester wiederholt die Schulmathematik in einer neuen axiomatischen Sprache; es ähnelt damit dem nachträglichen Erlernen der Grammatik bzw. Struktur einer Muttersprache.

In diesem Kapitel sollen mit Hilfe dieser Sprache u.A. die rationalen Zahlen konstruiert werden - ausgehend von möglichst wenigen Axiomen für die natürlichen Zahlen und den zwei wichtigsten Begriffen der Mathematik: Dem der **Menge** (s. Vorlesung I) und dem der **Abbildung** einer Menge in eine andere.

1. Abbildungen und Relationen

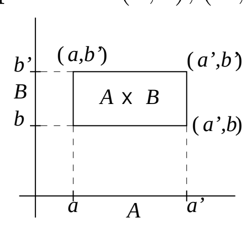
1.1. **Definitionen.** Mit Hilfe des Begriffs der Menge können wir den Begriff „Abbildung“ bzw. „Funktion“ etwas formaler definieren, indem wir eine Funktion mit ihrem Graphen identifizieren. Dazu brauchen wir zunächst folgende

Definition 1. *Das* **kartesische Produkt** $A \times B$ *(sprich „A kreuz B“) zweier Mengen* A, B *bezeichnet die Menge der geordneten Paare*

$$A \times B := \{ (a, b) \mid \ a \in A, b \in B \} .$$

Beispiele:

(1) $\{\star, \circ\} \times \{1, 2\} = \{(\star, 1), (\star, 2), (\circ, 1), (\circ, 2)\}$.
(2) Sind $A := [a, a']$, $B = [b, b']$ zwei Intervalle in $\mathbb{R}$, so ist $A \times B$ das Rechteck mit Eckpunkten $(a, b), (a', b), (a, b'), (a', b')$:



Aufgabe 1.

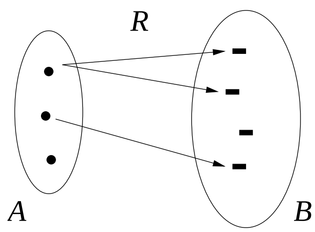
a) Seien A, B endliche Mengen mit $|A|$ bzw. $|B|$ Elementen. Bestimme (ohne formalen Beweis) $|A \times B|$, d.h. die Anzahl der Elemente von $A \times B$.
b) Vertauschen $\times$ und $\cup$, d.h. sind die Mengen $(A \times A') \cup (B \times B')$ und $(A \cup B) \times (A' \cup B')$ im Allgemeinen gleich? (Vgl. Bild oben!)

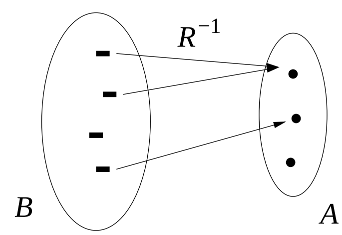
Definition 2. *Eine* **Relation** *zwischen A und B ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$.*

Zum Beispiel sei A die Menge der Zuhörer (das Auditorium) und B die Menge der Bleistifte im Vorlesungsraum. Dann ist

$$R := \{(z, s) \in A \times B \mid \text{ Stift } s \text{ gehört Zuhörer } z\}$$

eine Relation in $A \times B$. Solche endlichen Relationen lassen sich visualisieren, indem wir ein Pfeil von $a \in A$ nach $b \in B$ genau dann setzen, falls $(a, b) \in R$:





Wir können umgekehrt den Stiften ihre Besitzer zuordnen (sofern sie einen besitzen) und erhalten so die Relation R^{-1} in $B \times A$ (Reihenfolge!) rechts.

Wesentlich Eigenschaft der letzten Relation ist, das jeder Bleistift höchstens ein Besitzer hat. Hätte jeder Stift genau einen Besitzer, erhielten wir eine Abbildung, d.h. eine Relation, bei der von *jedem* $a \in A$ *genau ein* Pfeil in Richtung B startet:

Definition 3. *Eine* **Abbildung** *$f : A \to B$ „ordnet jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zu“, d.h. genauer: Eine Abbildung ist eine Relation f zwischen A und B, so dass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in f$ gibt. Statt $(a, b) \in f$ schreibt man dann $a \mapsto b$ oder $f(a) = b$ und nennt die Menge $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ kurz das* **Bild** *von f.*
Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

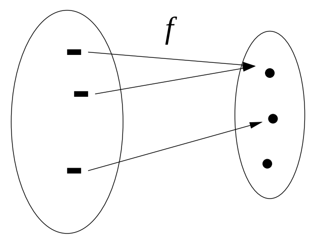
i) **surjektiv**, *falls $f(A) = B$ – oder äquivalent, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.*

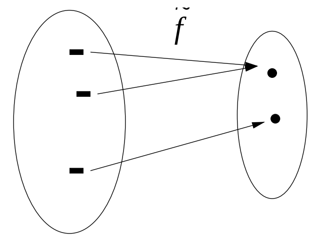
ii) **injektiv**, *falls je zwei verschiedene $a \neq a'$ auch verschiedene Bilder $f(a) \neq f(a')$ unter f haben – oder äquivalent, falls gilt: $f(a) = f(a') \quad \Rightarrow \quad a = a'$.*

iii) **bijektiv**, *falls f surjektiv und injektiv ist.*

Beispiele:

(1) Entfernen wir den Stift ohne Besitzer aus B in obigem Beispiel, erhalten wir die Abbildung f links:





f ist weder injektiv – zwei Stifte gehören dem gleichen Besitzer – noch surjektiv: es gibt einen Zuhörer, der keinen Stift besitzt. Verlässt erwartungsgemäß letzterer den Raum, erhalten wir die surjektive Abbildung $\tilde{f}$ rechts.

(2) Zu jeder Menge A gibt es eine „natürliche“ bijektive Abbildung von A in sich, die Identitätsabbildung:

$$\mathrm{id}_A : A \to A,\ a \mapsto a.$$

(3) Die Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ ist nicht injektiv, denn $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$, aber surjektiv.

(4) Die Bijektionen einer endlichen Menge in sich $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots n\}$ entsprechen Vertauschungen (**Permutationen**) einer Anordnung dieser Elemente $f : (1, \ldots, n) \mapsto (f(1), \ldots, f(n))$.

Aufgabe 2. Gib alle Abbildungen von $\{1, 2\}$ in sich an. Welche sind surjektiv, injektiv bzw. bijektiv? Formuliere einen Satz bezüglich dieser Eigenschaften für beliebige endliche Mengen.

Abbildungen lassen sich hintereinanderschalten, und dies verallgemeinert sich zu

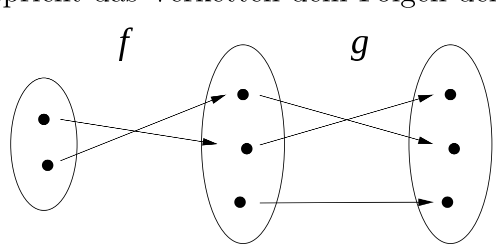
Definition 4. *Seien $R \in A \times B, R' \in B \times C$. Dann definiere ihre Verknüpfung als die Relation*

$$R \circ R' := \{\, (a, c) \in A \times C \mid\ \exists b : (a, b) \in R, (b, c) \in R' \,\}\,.$$

Insbesondere ist die Verknüpfung zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ wieder eine Abbildung, die man als $g \circ f$ (Reihenfolge getauscht! - sprich „g nach f“) bzeichnet, denn

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Anschaulich entspricht das Verketten dem Folgen der Pfeile:



Beispiele:

(1) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Dann ist $(g \circ g)(x) = (x^2)^2 = x^4$.
(2) Für jede Abbildung $f : A \to B$ gilt $f \circ \mathrm{id}_A = f$ und $\mathrm{id}_B \circ f = f$.
(3) Die Verkettung zweier Permuationen (siehe Beispiel 4) ist wieder eine Permutation. Allgemeiner gilt: Die Verkettung von Injektionen bleibt injektiv (das Bild oben ist ein Beispiel) und die Verkettung von Surjektionen bleibt surjektiv.

Wir können nun erste strukturelle Aussagen über Relationen und Abbildung insbesondere treffen:

Lemma 1. *Die Verknüpfung von Relationen ist assoziativ, d.h.*

$$(R \circ R') \circ R'' = R \circ (R' \circ R'').$$

Satz 1. (Äquivalente Definitionen) *Betrachte eine Abbildung $f : A \to B$.*

a) f ist injektiv $\iff$ Es gibt $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A : a \mapsto a$.
b) f ist surjektiv $\iff$ Es gibt $g : B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B : b \mapsto b$.
c) f ist bijektiv $\iff$ Es gibt eine eindeutige *Abbildung $f^{-1} : B \to A$ mit $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$.*

Aufgabe 3. Beweise diesen Satz – Hinweise: c) lässt sich z.B. aus a) und b) folgern, oder aber man zeigt zunächst c) und nutzt das zum Beweis von b), nämlich auf folgende Weise:

Ist f injektiv, so definiert f per Definition eine Bijektion $\tilde{f} : A \to f(A)$ auf ihr Bild (via $\tilde{f}(a) := f(a)$). Damit leistet

$$g(b) := \begin{cases} \tilde{f}^{-1}(b), & b \in f(A) \\ \text{irgendein } a \in A, & b \notin f(A) \end{cases}$$

das Gewünschte: $g(f(a)) = a \ \forall a \in A$.

Ist umgekehrt f nicht injektiv, also $f(a) = f(a')$ für zwei $a \neq a'$, so ist auch $g(f(a)) = g(f(a'))$, also auch $g \circ f \neq \mathrm{id}_A$ für jedes g. $\square$

Aufgabe 4.

a) Zeige mit Hilfe des Satzes: Die Abbildung

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot x$$

ist bijektiv genau dann, wenn $a \neq 0$.

b) Betrachte nun g^2 (d.h. $g^2(x) := a^2x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Ist g^2 bijektiv, surjektiv,injektiv für $a \neq 0$? Wie steht es mit der Einschränkung von g^2 auf $\{x \in \mathbb{R} \mid \ x > 0\}$?

c) Stelle geometrische Regeln auf, anhand derer sich die Injektivität und Surjektiviät von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ testen lässt.

2. Axiome der natürlichen Zahlen

Wir sind nun in der Lage, mit Hilfe der obigen Begriffe die natürlichen Zahlen axiomatisch zu definieren.

Definition 5. *Die Menge der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *ist definiert durch die Existenz einer Abbildung („Nachfolger") $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *N ist injektiv*
(2) *$N(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für ein $0 \in \mathbb{N}$*
(3) *Gilt $N(A) \subset A$ für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$, die 0 enthält, so ist $A = \mathbb{N}$.*

Offenbar hat die Abbildung

$$N : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$$

gerade diese Eigenschaften (nachprüfen!), doch haben wir die Symbole „1" und „+" ja noch gar nicht definiert, sondern wollen umgekehrt gerade letztere mittels N definieren. Zuvor bemerken wir jedoch, dass sich N zum Beweis durch **Induktion** benutzen lässt: Gegeben seien Aussagen $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$, deren Richtigkeit zu prüfen ist. Es gelte:

IV: $A(0)$ gilt (Induktionsvoraussetzung).
IS: Gilt $A(n)$, dann auch $A(N(n))$ (Induktionsschritt).

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ – Beweis: Angenommen $A(n)$ gilt für alle $n \in W \subset \mathbb{N}$, aber kein $n \in \mathbb{N} \setminus W$. Nach IV ist dann $0 \in W$ und nach IS gilt $N(W) \subset W$. Also folgt nach Axiom 3, dass $A = \mathbb{N}$. $\square$

Beispiele: siehe O. Forster: Analysis I, Kapitel 1.

Aufgabe 5. Seien A,B endliche Mengen mit $|A|$ bzw. $|B|$ Elementen. Finde die Anzahl von

a) Relationen zwischen A und B,
b) Abbildungen von A nach B,
c) bijektiven Abbildungen von A nach B,

und beweise einige Ergebnisse mittels Induktion. (mögliche Ergebnisse sind 0, $|B|^{|A|}$, $|A|!$, $|B|!$ und $2^{|A||B|}$.)

Definition 6. *Eine Menge G heißt kommutative* **Halbgruppe***, falls man in ihr „addieren" kann, d.h. es eine Abbildung $+ : G \times G \to G$ gibt, so dass gilt:*

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *(Assoziativität)*
(2) $a + b = b + a$ *(Kommutativität)*
(3) *Es gibt ein neutrales Element $0 \in G$, d.h. $0 + a = a$ für alle $a \in G$.*

Satz 2. *Es gibt genau eine Abbildung* $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, die* $\mathbb{N}$ *zu einer kommutativen Halbgruppe macht und* $N(n) = n + 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *erfüllt, wobei* $1 := N(0)$.

Das wird evtl. im 1. Semester bewiesen werden. Die so konstruierte Menge $\mathbb{N}$ muss also die uns vertraute sein.

$\mathbb{N}$ mit $+$ ist aber nicht die einzige Halbgruppe, sonst wäre der Begriff ja redundant. In der Tat ist die Halbgruppen-Struktur omnipräsent: Andere Beispiele sind:

(1) $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation „$\cdot$“, eindeutig bestimmt durch die Forderungen, dass 1 neutrales Element von $\cdot$ ist und $n \cdot (m + 1) = n \cdot m + n$ gilt. (Das muss damit wieder die uns vertraute Multiplikation sein.)
(2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Addition $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.
(3) $\{0, 1\}$ mit der Verknüpfungstabelle

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

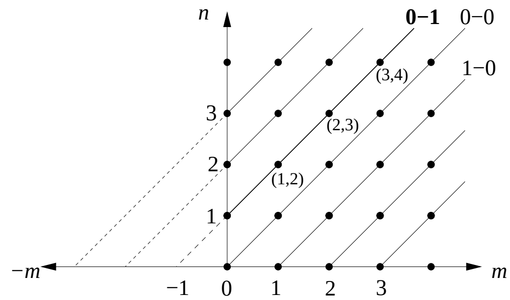
(4) Ist A eine (endliche) Menge und $Abb(A, A)$ die Menge aller Abbildungen von A nach A, so ist $(Abb(A, A), \circ)$ eine (i.A. nicht-kommutative!) Halbgruppe mit id_A als neutralem Element.

3. Konstruktion von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Wir wollen nun Gleichungen der Form $m + x = n$ für $n, m \in \mathbb{N}$ lösen. Problem ist nun wieder, dass die aus der Schule bekannte Lösung $n - m$ für $n < m$ gar nicht definiert ist. Wir können aber einfach $\mathbb{Z}$ als Menge aller Lösungen *definieren* wie folgt: Bemerke, dass eine Lösung - falls sie existiert – fixiert ist durch das Paar (n, m), wobei zwei Paare (n, m) und (n', m') die gleiche Lösung besitzen genau dann, wenn $n - m = n' - m'$. Zwar ist „$-$“ ja noch nicht definiert, wohl aber die äquivalente Bedingung $n + m' = n' + m$. In diesem Fall nennen wir die Paare $(n, m), (n', m')$ äquivalent. Damit *definieren* wir eine Lösung x von $n + x = m$ einfach als die Menge der zu (n, m) äquivalenten Paare, d.h. die Menge

(1) $$m - n := \{ (m', n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \; n + m' = n' + m \} ,$$

genannt die **Äquivalenzklasse** von (n, m), dargestellt durch die Strahlen in folgendem Bild:



Die Menge solcher Äquivalenzklassen kann dann auf natürliche Weise mit dem $\mathbb{Z}$ aus der Schule identifiziert werden (ordne einem Strahl sein Schnitt mit der x-Achse zu und umgekehrt), wobei das $+$ in $\mathbb{Z}$ gerade dem $+$ aus Beispiel 2 entspricht. Insbesondere identifizieren wir einfach die Äquivalenzklasse $m - 0$ mit der natürlichen Zahl m.

Diese Konstruktion funktioniert für alle kommutativen Halbgruppen:

Definition 7. *Eine kommutative Halbgruppe* $(G, \cdot)$ *heißt kommutative* **Gruppe***, falls für jedes Paar* $g, g' \in G$ *die Gleichung* $g \cdot x = g'$ *eine eindeutige Lösung* $x \in G$ *hat. Insbesondere heißt die Lösung der Gleichung* $g \cdot x = e$ *das Inverse zu* g*.*

Satz 3. *Jede kommutative Halbgruppe* $(G, \cdot)$ *lässt sich durch die Konstruktion* (1) *zu einer kommutativen Gruppe* $K(G, \cdot)$ *erweitern.*

Insbesondere ist also per Definition $K(\mathbb{N}, +) = \mathbb{Z}$. Doch können wir nun K auch auf die Multiplikation $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ anwenden und erhalten $K(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot) = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$! Hier notieren wir die Äquivalenzklassen (1) wie gewohnt als Brüche

$$\frac{m}{n} := \{\, (m', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid \; n \cdot m' = n' \cdot m\}$$

und idenifizieren $\frac{m}{1}$ mit der ganzen Zahl m. Das liefert die gewöhnlichen Rechenregeln für $+$ und $\cdot$ in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 6. Gib die Rechenregeln („Bruchrechnung“) für $\cdot$ und $+$ in $\mathbb{Q}$ an. Verifiziere, dass sich die Regeln nicht ändern, falls man ein Zähler-Nenner-Paar (m, n) durch ein äquivalentes Paar ersetzt.