Topologie I
Sommer 2009

Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michael Carl

1. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum, $B \subset X$. Zeige:

i) $X \setminus \overline{B} = (X \setminus B)^\circ$

ii) $X \setminus B^\circ = \overline{X \setminus B}$

iii) $(B^\circ)^\circ = B^\circ$

iv) $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Seien X, Y topologische Räume. Zeige: Die Produkttopologie auf $X \times Y$ ist die gröbste Topologie mit der Eigenschaft, dass für alle topologischen Räume Z und alle Abbildungen $f : Z \to X, g : Z \to Y$ gilt:

$$(f, g) : Z \mapsto X \times Y \text{ stetig} \iff f \text{ stetig und } g \text{ stetig.}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Ein topologischer Raum X heißt Hausdorffsch, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten disjunkte Umgebungen gibt.

i) Zeige, dass X genau dann Hausdorffsch ist, wenn die Diagonale $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$ ist.

ii) Zeige, dass jeder metrische Raum Hausdorffsch ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. (Beispiele Topologien I)

i) Sei X eine Menge. Zeige: Die Komplemente endlich vieler Punkte in X zusammen mit der leeren Menge definieren eine Topologie τ_1 auf X. Für welche Mengen X ist τ_1 Hausdorffsch?

ii) *Affine Zariski-Topologie* – Zeige: Die Komplemente affiner Unterräume (Punkte, Geraden, $\mathbb{R}^2$) im $\mathbb{R}^2$ definieren eine Subbasis einer Topologie τ_Z auf $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass die Teilraumtopologie von τ_Z auf der Geraden $\mathbb{R} \times \{0\}$ die Topologie τ_1 ist und folgere, dass τ_Z nicht Hausdorffsch ist.

(4 Punkte)