Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Klausur Funktionentheorie

Aufgabe 1.
Analog zum Spezialfall $n = 4$ von Lösung 1, Blatt 9 ist die Menge zwar offen, aber nicht zusammenhängend. Genauer ist der Rand von M eine Vereinigung von acht paarweise verschiedenen Ursprungsgeraden:

$$\begin{aligned}\partial M &:= \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z^8 = 0\}\\ &= \{r \exp(\mathrm{i}\varphi) : r \in \mathbb{R}, \varphi = \tfrac{\pi}{16} n,\ n \text{ ungerade},\ n \sim n + 16\}.\end{aligned}$$

Das Komplement $\mathbb{C} \setminus \partial M$ besteht folglich aus sechzehn disjunkten offenen, konvexen Zusammenhangskomponenten; und acht dieser Zusammenhangskomponenten bilden die Menge M:

$$M = \{r \exp(\mathrm{i}\varphi) : r > 0, \tfrac{\pi}{16}(n-1) < \varphi < \tfrac{\pi}{16}(n+1),\ n = 0 \bmod 4, n \sim n+32\}.$$

Dies sind acht keilförmige Gebiete mit achtzähliger Rotationssymmetrie um den Ursprung, die durch die Geradenmenge ∂M berandet werden und die 1 enthalten.

Aufgabe 2.
Mögliche Argumente:

1. Der Integrand besitzt die komplexe Stammfunktion $\frac{z^3}{3} - \frac{1}{z}$ auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, also verschwindet das Integral.

2. Die Funktion hat die Gestalt einer Laurentreihe um Null. Da sie nur zwei Glieder hat, ist sie auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Man liest ab, dass das Residuum in Null verschwindet. Daher ist das Integral über jeden geschlossenen Wert gleich Null. Somit existiert eine komplex Stammfunktion.

3. Man kann natürlich die Integrale auch explizit berechnen. Da wir für $n = 0$ den konstanten Weg haben, können wir $n \neq 0$ annehmen.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_n} (z^2 + z^{-2})\, \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ \mathrm{i}n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nt} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nt}\right)\\ &= \mathrm{i}n \left[\tfrac{1}{3\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}nt} + \tfrac{1}{-\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 3.

1. Die Aussage ist wahr.
   Da eine Möbiustransformation (als biholomorphe Abbildung $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$) durch das Bild dreier Punkte eindeutig bestimmt ist und Geraden und Kreise in Geraden und Kreise überführt, reicht es zu prüfen, ob drei Punkte auf dem Einheitskreis in die Gerade $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abgebildet werden:
   $$T(\mathrm{i}) = 0, \quad T(1) = 1, \quad T(-\mathrm{i}) = \infty.$$
2. Die Aussage ist falsch.
   Ob eine harmonische Funktion Realteil einer holomorphen Funktion ist, hängt vom Definitionsbereich ab. Das Gegenbeispiel der harmonischen Funktion $\log|z|$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ wurde auf Blatt 4 diskutiert.
3. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{1}{z}$ hat eine komplexe Stammfunktion, denn f ist holomorph auf den beiden sternförmigen Zusammenhangskomponenten des Definitionsbereiches, nämlich der oberen und unteren komplexen Halbebene.

Aufgabe 4.

Wir wenden in beiden Fällen die Formel von Cauchy-Hadamard für den Konvergenzradius an und finden

$$r = \limsup \left(\frac{2n^2 + n}{3n^2 + 1} \right)^{-1} = \frac{3}{2}$$

und

$$r = \limsup |a_n^2|^{-1/n} = (\limsup |a_n|^{-1/n})^2 = R^2 \ .$$

Aufgabe 5.

1. Wegen
   $$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk}}{x^2 + m^2} \mathrm{d}x \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + m^2} \mathrm{d}x$$
   reicht es aus, das Integral der symmetrischen Funktion $\frac{1}{x^2+m^2}$ auf der positiven reellen Halbachse abzuschätzen. Das Integral
   $$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + m^2} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{m^2}$$
   auf dem kompakten Interval ist endlich, weil der Integrand stetig ist. Den anderen Anteil schätzen wir ab zu
   $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + m^2} \mathrm{d}x \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1 \ .$$

2. Der Zähler ist nie Null, der Nenner hat die beiden einfachen Nullstellen $z = \pm \mathrm{i}m$. Dort liegen Pole erster Ordnung vor mit

$$\mathrm{res}_{z=\mathrm{i}m} f = (z - \mathrm{i}m) f(z)|_{z=\mathrm{i}m} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}(z + \mathrm{i}m)^{-1}|_{z=\mathrm{i}m} = \frac{\mathrm{e}^{-km}}{2\mathrm{i}m}$$

beziehungsweise

$$\mathrm{res}_{z=-\mathrm{i}m} f = (z + \mathrm{i}m) f(z)|_{z=-\mathrm{i}m} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}(z - \mathrm{i}m)^{-1}|_{z=-\mathrm{i}m} = -\frac{\mathrm{e}^{km}}{2\mathrm{i}m}$$

3. Wir wählen R so groß, dass das Rechteck in der oberen komplexen Halbebene den Pol im enthält. Aus dem Residuensatz schließen wir

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z=\mathrm{i}m}\, f = \frac{\pi\mathrm{e}^{-km}}{m} \ .$$

4. Das Integral über die reelle Achse ist gerade das gesuchte Integral und gleich dem in 3. berechneten Wegintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk}}{x^2 + m^2}\mathrm{d}x = \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi\mathrm{e}^{-km}}{m},$$

denn die Integrale über die drei anderen Kanten von γ_R gehen für $R \to \infty$ gegen Null:

Wir schätzen das Integral über die vertikalen Ränder ab. Dazu bemerken wir $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm R + \mathrm{i}t)k}| = \mathrm{e}^{-kt}$ und

$$\left|\frac{1}{(\pm R + \mathrm{i}t)^2 + m^2}\right| = \frac{1}{| \pm R + \mathrm{i}t + \mathrm{i}m| \cdot | \pm R + \mathrm{i}t - \mathrm{i}m|} \leq \frac{1}{R^2}$$

schätzen wir zunächst das Integral über die vertikalen Ränder ab, wo

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_0^R f(\pm R + \mathrm{i}t)\mathrm{i}\mathrm{d}t| &\leq \frac{1}{R^2}\textstyle\int_0^R \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} \frac{1}{kR^2}(1 - \mathrm{e}^{-kR}) \leq \frac{1}{kR^2} & , k \neq 0 \\ \frac{1}{R} & , k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

was für $R \to \infty$ und $k > 0$ gegen Null geht.

Schließlich schätzen wir noch das Integral über die horizontale Kante durch iR ab:

$$\left|\int_{-R}^{R} f(\mathrm{i}R + t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{-kR}}{|R + m||R - m|}\mathrm{d}t = 2R\frac{\mathrm{e}^{-kR}}{|R + m||R - m|} \ ,$$

was ebenfalls für große R und $k > 0$ gegen Null geht.