Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 9 – Präsenzübung

Aufgabe 1. Die Ursprungsgerade $R := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}\mathbb{R}$ liegt wegen $(\lambda \exp(\mathrm{i}\pi/n))^n = -\lambda^n \leq 0$ im Komplement der Menge $M := \{z \in \mathbb{C} : |z^n - 1| < 1\}$. Die Menge M enthält aber die Punkte 1 und $p := e^{\mathrm{i}2\pi/n}$, also ist M nicht zusammenhängend, denn jeder Weg γ von 1 nach p muss nach dem Zwischenwertsatz für die R-orthogonale Koordinate $\left\langle \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}, \gamma \right\rangle$ von γ die Gerade R schneiden.

Aufgabe 2. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{\sin(z)}{z}$ ist ganz $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}/(2n+1)!$, besitzt also eine komplexe Stammfunktion.

Aufgabe 3.

a) Man rechnet direkt nach $\int_\gamma |z|^n dz = e^{\mathrm{it}}\Big|_0^{2\pi} = 0$.

b) $\overline{\int_\gamma g(z)dz} = \int \overline{g \circ \gamma \gamma'} dt = \int \overline{g \circ \gamma} \frac{\gamma'}{\gamma^2} dt = -\int_\gamma \overline{\frac{g(z)}{z^2}} dz$

Aufgabe 4.

Eine solche Transformation ist von der Form $z \mapsto az + b$ mit $a \neq 0$ und ist daher eine ganze Funktion mit ganzer Umkehrfunktion $z \mapsto \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$ und somit biholomorph.

Die Menge $\{T : T$ ist Möbiustransformation, $T(z) = z \iff z = \infty$ oder $T = 1\}$ enthält sicher die Translationsgruppe von Elementen $z \mapsto z + b$ mit $b \in \mathbb{C}$. Umgekehrt folgt aus

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a + b/z}{c + d/z}$$

für $c \neq 0$ die Beziehung $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Also kann $f(\infty) = \infty$ nur für $c = 0$ gelten. Die Transformation $z \mapsto az + b$ hat aber für $a \neq 1$ den weiteren Fixpunkt $z = \frac{b}{1-a}$, so dass nur die Translationen in der Menge liegen können.

Das Integral $\int_\gamma \overline{g(z)}\mathrm{d}z$ hängt nicht nur von der Homotopieklasse von γ ab. Betrachte zum Beispiel für $n > 0$ und den Weg $\gamma_R(t) = R\exp(\mathrm{i}t)$ das Integral

$$\int_{\gamma_R} \overline{z^n}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} R^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} R\mathrm{i}n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = 2\pi \mathrm{i}nR^{n+1}$$

Aufgabe 5.

a) $r = \limsup (2^n)^{1/2n} = \sqrt{2}$.

b) $r = \limsup |a_n|^{-1/2n} = \sqrt{\limsup |a_n|^{-1/n}} = \sqrt{R}$.