Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 9 – Präsenzübung

Aufgabe 1. Für welche geraden Zahlen $n \geq 2$ ist die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} : |z^n - 1| < 1\}$ von $\mathbb{C}$ ein Gebiet? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2. Hat die folgende Funktion auf dem angegebenen Definitionsbereich eine komplexe Stammfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{\sin(z)}{z} \quad f(0) = 1$$

Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_\gamma |z|^n dz$ für $n \in \mathbb{Z}$ und den Weg $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\overline{\int_\gamma g(z)dz} = -\int_\gamma \frac{\overline{g(z)}}{z^2} dz$$

für den Weg $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

Aufgabe 4. Sind die folgenden Aussagen richtig?

	ja	nein
Durch Einschränkung einer Möbiustransformation $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, die den Punkt ∞ festlässt, erhält man eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ auf sich.	☐	☐
Die Menge $\{T : T$ ist Möbiustransformation, $T(z) = z \iff z = \infty$ oder $T = \mathrm{id}\}$ ist die Gruppe der Translationen.	☐	☐
Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex analytisch. Das Integral $\int_\gamma \overline{g(z)}\mathrm{d}z$ hängt nur von der Homotopieklasse des Wegs γ ab.	☐	☐

Aufgabe 5. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n}}{2^n}$.

b) $\sum_{n=0}^\infty a_n z^{2n}$, wobei $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius R sei.