Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1.

1. Wir rechnen

$$\int_\gamma \overline{z}^3 \mathrm{d}z = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\Big|_0^\pi = 0$$

2. Wir berechnen mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{Log}(z)dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\log(R)+\mathrm{i}t))\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t\\ &= R\left(\log(R)e^{\mathrm{i}t}+\mathrm{i}(te^{\mathrm{i}t}-(-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}))\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\\ &= Re^{\mathrm{i}t}(\log(R)-1+\mathrm{i}t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\mathrm{i}R(\log R - 1)\end{aligned}$$

3. Nach der Potenzreihenentwicklung der sinus-Funktion wissen wir

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z} = \int_\gamma \frac{1}{z}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(2n+1)}}{(2n+1)!}\mathrm{d}t$$

Der Konvergenzradius der Sinusfunktion ist unendlich; die Potenzreihe ist lokal gleichmäßig stetig und wir dürfen Grenzprozesse vertauschen. Aber

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(2n+1)}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(2n+1)}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Aufgabe 2.

1. Sei $x \in \mathbb{R}$. Jede Umgebung $D_r(x)$ in $\mathbb{C}$ enthält alle komplexen Zahlen der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $|y| < r$, die nicht in $\mathbb{R}$ liegen. Daher ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ nicht offen und somit kein Gebiet.

2. Es ist für $z = x + \mathrm{i}y$ der Betrag $|\exp(z)| = \exp(x)$, was genau für Realteil $x > 0$ größer gleich Eins ist. Daher ist $\{z \in \mathbb{C} : |\exp(z)| > 1\} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$ gleich der rechten Halbebene. Diese ist offenbar offen und wegzusammenhängend, also ein Gebiet.

3. Wir wollen gleich allgemein für $a \in \mathbb{C}$ und $b > 0$ die Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} | |z^2 - a| < b\}$$

untersuchen. Betrachte dazu die polynomiale Abbildung $z \mapsto z^2$, die natürlich stetig ist. Es ist

$$M = f^{-1}(D_b(a))$$

Die Menge M ist als Urbild der offenen Kreisscheibe $D_b(a)$ unter einer stetigen Abbildung stets offen.

Es geht also darum, ob das Urbild zusammenhängend ist. Wir können uns auf den Fall zurückziehen, wenn $a \geq 0$ nicht-negativ reell ist. Denn schreibe $a = |a| \exp(\mathrm{i}\varphi)$, dann ist

$$|\exp(\mathrm{i}\varphi)z - a| = |z - |a|| \ ,$$

und wir erhalten die Lösungen für komplexes a aus denen für a durch eine Rotation um $\varphi = \arg(a)$.

Ist $a \geq b$, so gilt für $z = \mathrm{i}x$ sicher $|\mathrm{i}x - a| = |x^2 + a| \geq a \geq b$, so dass die Punkte auf der imaginären Achse nicht in der fraglichen Menge liegen. Es liegen aber die Punkte $\pm\sqrt{a}$ beide in der Menge und können nicht verbunden werden. In diesem Fall zerfällt die Menge in zwei Zusammenhangskomponenten.

Im Fall $a < b$ wollen wir nachweisen, dass die Menge M wegzusammenhängend ist. Wir bemerken, dass in diesem Fall $z = 0$ in der Menge M liegt und behaupten, dass mit z auch der Weg $\gamma_z(t) = tz$ mit $0 \leq t \leq 1$ in der Menge M liegt. Dazu müssen wir nur zeigen $f(\gamma_z(t)) = t^2 z^2 \in D_b(a)$. Aber dies ist ein Geradensegment von 0 nach $z^2 \in D_b(a)$ in der konvexen Kreisscheibe $D_b(a)$.

Aufgabe 3. Angenommen, eine Funktion f habe eine komplexe Stammfunktion g. Dann ist das Wegintegral entlang eines geschlossenen Wegs $\gamma : I = [a, b] \to D$ im Definitionsgebiet gleich Null:

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_I f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_I g'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t = g \circ \gamma(t)\Big|_a^b = 0$$

1. Betrachte die Kurve $\gamma(t) = \exp(2\pi \mathrm{i}t)$ mit $0 \leq t \leq 1$ und berechne

$$\int_0^1 \overline{\exp(2\pi\mathrm{i}t)} 2\pi\mathrm{i} \exp(2\pi\mathrm{i}t)\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i} \neq 0 \ .$$

2. Wir betrachten die gleiche Kurve γ und finden

$$\int_\gamma \frac{1}{2} z \mathrm{d}z + \frac{1}{2} \int_\gamma \overline{z} \mathrm{d}z \ .$$

   Da der erste Summand $\frac{1}{2}z$ die komplexe Stammfunktion $\frac{1}{4}z^2$ hat, verschwindet das erste Integral. Das zweite Integral haben wir gerade berechnet. Daher

$$\int_\gamma \mathrm{Re}\,(z) \mathrm{d}z = \pi \mathrm{i} \neq 0 \ .$$

3. Man rechnet leicht nach, dass $\frac{1}{\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} \sin z}$ eine komplexe Stammfunktion ist.