Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1.

1. Aus $|a_\nu| \leq |b_\nu|$ folgt $\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leq \sqrt[\nu]{|b_\nu|}$. Da dies für fast alle ν gilt, folgt $\limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leq \limsup \sqrt[\nu]{|b_\nu|}$ und somit die angegebene Ungleichung für die Konvergenzradien.

2. Ein mögliches Gegenbeispiel ist durch die beiden Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} -z^\nu$ vom Konvergenzradius 1 gegeben. Die Summe ist die konstante Funktion mit Konvergenzradius $r = \infty$. Die Aussage selbst folgt sofort aus dem Umordnungssatz.

Aufgabe 2. Wir rechnen mit Hilfe der Formel für eine geometrische Summe:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n} \cos(\nu z) &= \sum_{\nu=0}^{n} \tfrac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^\nu + (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})^\nu}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}} + \tfrac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(n+1/2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}} + \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z(n+1/2)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{\sin\frac{1}{2}z}
\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{n} \sin(\nu z) &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(n+1/2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}} - \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z(n+1/2)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z(n+1/2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z(n+1/2)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z/2+\pi/2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z/2+\pi/2)}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}\tfrac{\cos(n+\frac{1}{2})z}{\sin\frac{1}{2}z}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Wir berechnen die Reihenentwicklungen:

$$\begin{aligned}
\sinh(z) &= \tfrac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2} = \sum_{n \text{ ungerade}} \tfrac{x^n}{n!} \\
\cosh(z) &= \tfrac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2} = \sum_{n \text{ gerade}} \tfrac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt dann aus dem Vergleich mit der Reihenentwicklung von Sinus- und Kosinusfunktion durch Abschätzung der einzelnen Koeffizienten. Die Formeln

$$\sinh z = \frac{1}{\mathrm{i}}\sin(\mathrm{i}z) \qquad \text{und} \qquad \cosh z = \cos(\mathrm{i}z)$$

zeigen, dass die Abschätzungen scharf sind.Für coth := $\frac{\cosh}{\sinh}$ finden wir:

Es gilt $\cot(z) = \cot(z+\pi)$ und für $0 < |z| < \pi$ gilt die Laurententwicklung (unbekannt, Angabe als Hinweis?)

$$\cot(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} z^{2n-1}$$

für positive reelle Koeffizienten $a_{2n} := 2^{2n} \frac{B_{2n}}{(2n)!}$. Damit gilt

$$|iz \cdot \cot(iz)| = |\sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n}| z^{2n}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} |z|^{2n} = |z| \cdot \cot(i|z|) = |z| \coth(|z|),$$

also $|\cot(z)| \leq \coth |z|$. Diese Ungleichung verbessert die gesuchte, da die Einschränkung $\coth : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend ist: $\cot' = -\frac{1}{\sin^2} < 0$.

Aufgabe 4. Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |z|^{\nu}$ ist Majorante der Reihen aus a) und b). Deshalb sind diese lokal gleichmäßig konvergent und deren Ableitung ist gleich der gliedweisen Ableitung der Summanden.

Um die Identität zu zeigen, leiten wir zunächst beide Seiten ab: im Fall von a) ist die linke Seite gleich $-\frac{1}{1-z}$ und die rechte Seite gleich $-\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu-1}$, was für $|z| < 1$ mit der Ableitung der linken Seite übereinstimmt. Am Punkt $z = 0$ haben beide Funktionen Wert Null, sind also gleich. Auch die Funktionen in b) haben in $z = 0$ Wert Null, und ihre Ableitungen sind für die linke Seite

$$-\mathrm{Log}(1 - z) \cdot \frac{1}{1 - z} = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu} \right) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \right)$$

und für die rechte Seite $\sum_{\nu=1}^{\infty} s_n z^n$. Dies stimmt nach dem Cauchy-Produkt von Reihen überein.