Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1. Es seien r_1 bzw. r_2 die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ bzw. $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu$ mit Werten in einem Banachraum E.

1. Zeigen Sie, dass aus $|a_\nu| \leq |b_\nu|$ für fast alle ν folgt $r_1 \geq r_2$.
2. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu + b_\nu)z^\nu$ größer gleich dem Minimum von r_1 und r_2 ist. Überlegen Sie sich auch ein Beispiel, wo der Konvergenzradius strikt größer als das Minimum ist.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 2. Zeigen Sie

$$\sum_{\nu=0}^{n} \cos(\nu z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{\sin\frac{1}{2}z}$$

und stellen Sie eine ähnliche Formel für $\sum_{\nu=0}^{n} \sin(\nu z)$ auf.

(2+1+1 Punkte)

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, dass auf $D_r(0) \subset \mathbb{C}$ gilt

$$|\sin z| \leq \sinh r \quad \text{und} \quad |\cos z| \leq \cosh r$$

und zeigen Sie, dass diese Abschätzungen für $g_1(r) := \sup_{z\in D_r(0)} |\sin(z)|$ bzw. $g_2(r) := \sup_{z\in D_r(0)} |\cos(z)|$ nicht verbessert werden können.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Sei Log der Hauptwert des Logarithmus und $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

a) $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{z^\nu}{\nu}$

b) $\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}(1-z)\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} z^{n+1}$

(2+2 Punkte)

Abgabe: Am Montag, 7.12.2009 in der Vorlesung. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe erkennbar auf die Abgabe.