Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1.

a) Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ ist in $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ reell differenzierbar, wenn es für die reellwertigen Funktionen u, v in (x_0, y_0) stetige Funktionen $\Delta^{1,2}_{u,v}(x, y)$ gibt, so dass gilt

$$\begin{array}{rcl} u(x,y) & = & u(x_0,y_0) + (x-x_0)\Delta_1^u(x,y) + (y-y_0)\Delta_2^u(x,y) \\ v(x,y) & = & v(x_0,y_0) + (x-x_0)\Delta_1^v(x,y) + (y-y_0)\Delta_2^v(x,y) \end{array}$$

wobei $\Delta_1^u(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $\Delta_2^u(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}$ jeweils die partiellen Ableitungen nach x bzw. y sind.
Beachten wir

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(z - z_0 + \overline{z} - \overline{z}_0) \quad \text{und} \quad y - y_0 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - z_0 - \overline{z} + \overline{z}_0)$$

und setzen dies ein, folgt aus der reellen Differenzierbarkeit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\frac{1}{2}(\Delta_1(z) - \mathrm{i}\Delta_2(z)) + (\overline{z} - \overline{z}_0)\frac{1}{2}(\Delta_1(z) + \mathrm{i}\Delta_2(z))$$

Dies ist eine Beziehung der gesuchten Form mit

$$\Delta_z(z) = \frac{1}{2}\left(\Delta_1(z) - \mathrm{i}\Delta_2(z)\right) \quad \text{und} \quad \Delta_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\Delta_1(z) + \mathrm{i}\Delta_2(z))$$

mit $\Delta_i(z) = \Delta_i^u(z) + \mathrm{i}\Delta_i^v(z)$. Umgekehrt folgt aus der Zerlegung

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta_z(z) + (\overline{z} - \overline{z_0})\Delta_{\overline{z}}(z)$$

mit den Beziehungen

$$z - z_0 = x - x_0 + \mathrm{i}(y - y_0) \quad \text{und} \quad \overline{z} - \overline{z}_0 = x - x_0 - \mathrm{i}(y - y_0)$$

die Formel

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\left(\Delta_z(z) + \Delta_{\overline{z}}(z)\right) + (y - y_0)\mathrm{i}\left(\Delta_z(z) - \Delta_{\overline{z}}(z)\right)$$

b) Als direkte Folgerung aus a) sehen wir, dass komplexe Differenzierbarkeit äquivalent ist zu reeller Differenzierbarkeit mit $\Delta_{\overline{z}}(z) = 0$.

c) Linearität ist offensichtlich. Gemäß a) existieren in 0 stetige Funktionen Δ_i^f, Δ_i^g, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
f(z+h) &= f(z) + h\Delta_1^f(h) + \overline{h}\Delta_2^f(h), \\
g(z+h) &= g(z) + h\Delta_1^g(h) + \overline{h}\Delta_2^g(h), \\
\Rightarrow fg(z+h) &= fg(z) \\
&+ h\cdot\left(\Delta_1^f(h)g(z) + \Delta_1^g(h)f(z) + h\Delta_1^f\Delta_1^g(h) + \overline{h}\Delta_1^f\Delta_2^g(h)\right) \\
&+ \overline{h}\cdot\left(\Delta_2^f(h)g(z) + \Delta_2^g(h)f(z) + \overline{h}\Delta_2^f\Delta_2^g(h) + h\Delta_2^f\Delta_1^g(h)\right)
\end{aligned}$$

Die Leibnizregel folgt nun aus der Stetigkeit von $\Delta_{1,2}^{f,g}$ in h bei 0.

d) Es ist $z = z_0 + 1\cdot(z - z_0) + 0\cdot(\overline{z} - \overline{z}_0)$, woraus $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$ und $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$ direkt aus a) folgt. Ähnlich ist $\overline{z} = \overline{z}_0 + 0\cdot(z - z_0) + 1\cdot(\overline{z} - \overline{z}_0)$, so dass wiederum nach a) $\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$ und $\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$ folgt.

e) Da f zweimal stetig differenzierbar ist, vertauschen die partiellen Ableitungen nach x bzw. y. Damit folgt die Gleichung durch direktes Nachrechnen.

f) Analog zur Leibnizregel in b) zeigt man für f differenzierbar in z_0, g differenzierbar in $f(z_0)$:

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(z_0))\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(z_0))\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0).$$

g) Das folgt aus f), indem wir eine Hilfsfunktion $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definieren durch

$$\tilde{\varphi}(z) = \varphi(\operatorname{Re} z) \ .$$

Es gilt dann

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z}|_{(t,0)} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \overline{\tilde{\varphi}}}{\partial \overline{z}}|_{(t,0)} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\overline{\varphi}}{\mathrm{d}t}$$

woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 2.

a) Für $z = 0$ gilt ohnehin $f_\nu(0) = 1$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Wir finden für $z \neq 0$ die Gleichung

$$1 - f_\nu(z) = \frac{az^\nu}{1 + az^\nu} = \frac{1}{1 + \frac{1}{az^\nu}} \ .$$

Halte $z_0 \in D_1(0)$ fest und wähle $r > 0$ so klein, dass $D_r(z_0) \subset D_1(0)$. Für alle $z \in D_r(z_0)$ ist

$$|z| \leq |z_0| + r =: \theta < 1 \ .$$

Somit ist für alle $z \in D_r(z_0)$

$$|1 - f_\nu(z)| \leq \frac{a}{a + \theta^{-\nu}}$$

Diese in z gleichmäßige Schranke wird für große ν beliebig klein. Die Funktionenfolge konvergiert also auf $D_1(0)$ lokal gleichmäßig gegen die konstante Funktion 1.

b) Sei $|z| \geq r > 1$. Dann finden wir

$$|1 + az^\nu| \geq |1 - |a||z|^\nu|$$

Wegen $|z| \geq r > 1$ ist für ν hinreichend groß $|a||z|^\nu > 1$ und deswegen

$$|1 + az^\nu| \geq |a||z|^\nu - 1 \geq |a|r^\nu - 1$$

gleichmäßig in z. Somit haben wir für ν hinreichend groß die Abschätzung

$$|f_\nu(z)| \leq \frac{1}{|a|r^\nu - 1} \ ,$$

was für große ν beliebig klein wird. Also konvergiert für jedes $r > 1$ die Folge auf $\mathbb{C} \setminus D_r(0)$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion 0.

Für $|z| = 1$ liegen die Verhältnisse komplizierter. $f_\nu(1) = (1 + a)^{-1}$ ist konvergent, die Grenzfunktion ist aber nicht stetig im Punkt 1. Für $z = -1$ ist die Folge wegen

$$f_\nu(-1) = \begin{cases} \frac{1}{1+a} & \text{für} \quad \nu = 0 \bmod 2 \\ \frac{1}{1-a} & \text{für} \quad \nu = 1 \bmod 2 \end{cases}$$

nicht einmal konvergent.

Aufgabe 3. Sei $a_\nu := \frac{z^\nu}{1-z^\nu}$. Dann ist

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1 - \frac{1 - z}{1 - z^{\nu+1}} \ ,$$

also gilt $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = z$ für $|z| < 1$. Folglich gibt es ein $N(|z|) \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| < 1$ für alle $\nu > N(|z|)$, also konvergiert die zugehörige Reihe nach dem Quotientenkriterium in $D_1(0)$. Da die Schranke N monoton in $|z|$ ist, konvergiert die Reihe sogar gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $D_1(0)$.

Wegen

$$a_\nu = \frac{1}{1 - z^{-\nu}} \to 1$$

für $|z| > 1$ ist a_ν keine Nullfolge, also divergiert die zugehörgige Reihe auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_1(0)}$.

Im Grenzfall $|z| = 1$ gilt: Ist z in der Menge der Einheitswurzeln $Q := \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$, so sind unendlich viele Koeffizienten der Reihe und somit auch die Reihe selbst nicht definiert. Falls $z \in S^1 \setminus Q$, so ist jedes $q \in Q$ ein Häufungspunkt der Menge $\{z^\nu | \nu \in \mathbb{N}\}$, d.h. a_n zerfällt in unendlich viele divergente Teilfolgen, kann also selbst nicht konvergent sein.