Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Ist f reell differenzierbar, so setzen wir für $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \equiv f_z(z_0) := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \equiv f_{\overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}).$$

Diese Ausdrücke heißen auch Wirtinger-Ableitungen.

Zeigen Sie:

a) f ist genau dann reell differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn es in z_0 stetige Funktionen $\Delta_z, \Delta_{\overline{z}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta_z(z) + (\overline{z} - \overline{z_0})\Delta_{\overline{z}}(z).$$

Ferner gilt in diesem Falle $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \Delta_z(z_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \Delta_{\overline{z}}(z_0)$.

b) f ist genau dann komplex differenzierbar in z_0, wenn f in z_0 reell differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ gilt.

c) $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sind $\mathbb{C}$-lineare Operatoren, für die die Leibniz-Regel gilt, d.h. für zwei reell differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}(\lambda f + \mu g) = \lambda \frac{\partial}{\partial z} f + \mu \frac{\partial}{\partial z} g$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \cdot g) = (\frac{\partial}{\partial z} f) \cdot g + f \cdot (\frac{\partial}{\partial z} g)$$

und analoge Gleichungen für $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

d) Zeigen Sie:

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0 \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$$

e) Sei f zweimal stetig reell differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

f) Vervollständigen Sie die Kettenregel für reell-differenzierbare Funktionen f, g, die auf Gebieten von $\mathbb{C}$ definiert sind und Werte in $\mathbb{C}$ annehmen:

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(z_0))\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \dots \ ,$$

Formulieren Sie die angemessenen Voraussetzungen an f und g und beweisen Sie die von Ihnen formulierte Regel.

g) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige differenzierbare Funktion einer reellen Veränderlichen und f reell differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \varphi)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\mathrm{d}\overline{\varphi}}{\mathrm{d}t}$$

(2+1+1+1+1+2+1 Punkte)

Aufgabe 2. Betrachten Sie für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\nu = 1, 2, \dots$ die Folge von Funktionen

$$f_\nu(z) = \frac{1}{1 + az^\nu} \ .$$

a) Man zeige, dass für $\nu \to \infty$ die Folge auf der offenen Kreisscheibe $D_1(0)$ lokal gleichmäßig gegen die konstante Funktion 1 konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $r > 1$ die Folge auf $\mathbb{C} \setminus D_r(0)$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion 0 konvergiert.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{1 - z^\nu} \ .$$

a) Geben Sie alle $z \in \mathbb{C}$ an, für die die Reihe konvergiert. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wo konvergiert diese Reihe gleichmäßig?

(2+2 Punkte)

Abgabe: Am Montag, 23.11.2009 in der Vorlesung. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe erkennbar auf die Abgabe.